

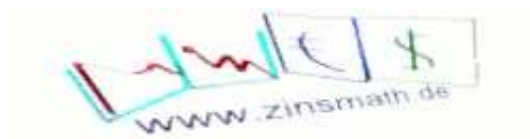
# ZinsMath

Release 4.03

Torsten Wehner

13.11.2019

20:30:09



**Zusammenfassung**

Handbuch zur Software [ZinsMath](http://www.zinsmath.de)

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Softwarebezug und Registrierung</b>	<b>1-5</b>
<b>2</b>	<b>Vertragsbedingungen</b>	<b>2-6</b>
<b>3</b>	<b>Zinsrechnung</b>	<b>3-9</b>
3.1	Effektivzins für unterjährige Verzinsung . . . . .	3-12
<b>4</b>	<b>Sparen</b>	<b>4-14</b>
4.1	Festgeld . . . . .	4-15
4.2	Ratensparen . . . . .	4-17
4.3	Endwertberechnung (Future Value) . . . . .	4-19
4.4	Barwertberechnung (Present Value) . . . . .	4-20
4.5	Zinsberechnung aus Barwert und Endwert . . . . .	4-21
<b>5</b>	<b>Versicherungen</b>	<b>5-22</b>
5.1	Kapitalbildene Lebensversicherungen mit festen Prämien . . . . .	5-22
5.2	Kapitalbildene Lebensversicherungen mit Dynamik . . . . .	5-24
<b>6</b>	<b>Wertpapiere</b>	<b>6-27</b>
6.1	Festverzinsliche Wertpapiere mit Zinsauszahlung . . . . .	6-27
6.2	Festverzinsliche Wertpapiere mit Zinsansammlung . . . . .	6-29
6.3	Wertpapiere mit variablem Zins und Zinsauszahlung . . . . .	6-30
6.4	Wertpapiere mit variablem Zins und Zinsansammlung . . . . .	6-31
6.5	Bundeswertpapiere . . . . .	6-32
6.6	Bundesschatzbrief Typ A . . . . .	6-33
6.7	Bundesschatzbrief Typ B . . . . .	6-34
6.8	Finanzierungsschätze . . . . .	6-35
6.9	Null-Kupon-Anleihen . . . . .	6-36
6.10	Aktien . . . . .	6-37

---

<b>7</b>	<b>Steuern auf Kapitaleinkünfte</b>	<b>7-39</b>
<b>8</b>	<b>Renten</b>	<b>8-40</b>
8.1	Rente mit Kapitalverzehr . . . . .	8-40
8.1.1	Nachschüssige Barwertfaktoren . . . . .	8-40
8.1.2	Vorschüssige Barwertfaktoren . . . . .	8-41
8.2	Ewige Rente . . . . .	8-43
8.2.1	Ewige nachschüssige Rente mit jährlicher Verzinsung . . . . .	8-43
8.2.2	Ewige nachschüssige Rente mit monatlicher Verzinsung . . . . .	8-44
8.2.3	Ewige vorschüssige Rente mit monatlicher Verzinsung . . . . .	8-45
<b>9</b>	<b>Kredite</b>	<b>9-46</b>
9.1	Ratenkredite . . . . .	9-46
9.2	Annuitäten- und Hypothekenkredite . . . . .	9-48
9.2.1	Effektivzinsberechnung . . . . .	9-53
9.3	Leasing . . . . .	9-54
<b>10</b>	<b>Effektivzins</b>	<b>10-55</b>
10.1	Vorwort . . . . .	10-55
10.2	Berechnung . . . . .	10-55
10.3	ZinsMath Effektivzinssolver . . . . .	10-56
10.4	Effektivzinsberechnung mit hoher Auflösung . . . . .	10-61
10.5	ZinsMath CSV Creator . . . . .	10-62
10.6	Dateninput Effektivzinsanalyse . . . . .	10-65
<b>11</b>	<b>Umrechnungsfaktoren / Effektivverzinsung</b>	<b>11-67</b>
<b>12</b>	<b>Warenzeichen</b>	<b>12-68</b>

---

## Abbildungsverzeichnis

A3-1 Anwendung des Zinssatzes . . . . .	3-11
A3-2 Nominalzins vs. Effektivzins . . . . .	3-13
A4-3 Kontoverlauf Ratensparen . . . . .	4-18
A5-4 Lebensversicherung . . . . .	5-26
A9-5 Restschuldverlauf eines Ratenkredites . . . . .	9-47
A9-6 Faktoren zur Beurteilung eines Annuitätendarlehens . . . . .	9-48
A9-7 Zins, Tilgung und Restschuldverlauf eines Annuitäten- Hypothekendarlehens . . . . .	9-51
A9-8 Restschuldverlauf eines Annuitäten- und Hypothekendarlehens . . . . .	9-52
A10- <del>Z</del> insMath GUI des Effektivzinssolvers . . . . .	10-61
A10- <del>Z</del> insMath CSV Creator . . . . .	10-63
A10- <del>Z</del> insMath CSV Creator / Meldung nach geschriebenem CSV File . . . . .	10-64

## Abkürzungsverzeichnis

LV	Lebensversicherung
KLV	Kapitalbildende Lebensversicherung
PAngV	Preisangabenverordnung
AHD	Annuitäten- und Hypothekendarlehen (Kredit)
BB	Bundeszentralbank

---

# 1 Softwarebezug und Registrierung

Die Software *ZinsMath* inklusive dieser Dokumentation kann über das Internet unter folgender Adresse bezogen werden:

[www.zinsmath.de](http://www.zinsmath.de)

Sollte Ihnen der Zugriff auf das Internet nicht möglich sein, lassen wir Ihnen gern gegen Selbstkostenerstattung von EUR 8.00 eine CD - Rom mit der aktuellen *ZinsMath* Testversion zukommen.

Herrn  
Dipl.-Ing. Torsten Wehner  
ZinsMath  
Berthold-Haupt-Str. 22  
01257 Dresden

Tel: +49 170 - 3 01 27 85  
Fax: +49 322 - 24 11 19 08

Skype: [Call ZinsMath \(Skype\)](#)  
Email: [wehner@zinsmath.de](mailto:wehner@zinsmath.de)

Gern wollen wir auch erwähnen, dass wir gemäß unseren Vertragsbedingungen auch eine Hotline unterhalten. Siehe hierzu Kapitel 2.

Die Weitergabe der Software *ZinsMath* wird ausdrücklich erwünscht. Wir bitten Verlage und Redaktionen im Falle einer Veröffentlichung der Software um Überlassung einer Referenz-CD.

## 2 Vertragsbedingungen

Stand: 13.11.2019

### 1. Eigentum

Die Programme *ZinsMath*, *ZinsMathEZ* und *ZinsMathEZ 4 Excel*, im folgenden auch als „Software“ bezeichnet, sind Eigentum von Herrn Torsten Wehner, Berthold-Haupt-Str. 22, D-01257 Dresden. Herr Wehner tritt als Lizenzgeber auf.

### 2. Vertragsgegenstand

Der Lizenzgeber räumt dem Lizenznehmer das einfache, nicht ausschließliche und ohne Zustimmung des Lizenzgebers nicht übertragbare Recht ein das auf Datenträger aufgezeichnete Softwareprodukt auf einem Rechner zu nutzen (Lizenz). Lizenznehmer kann eine Firma oder eine natürliche Person sein.

### 3. Bestellung

Die Bestellung wird erst mit Eingang (auch über elektronische Medien) eines ausgefüllten Bestellformulars beim Lizenzgeber wirksam. Als vereinbart gilt der bei Eingang der Bestellung beim Lizenzgeber gültige Preis, sofern nicht ein anderer Preis ausdrücklich vereinbart wurde.

### 4. Testversion / Verkauf über Dritte

Testversion ist die auf 5 Programmstarts oder laufzeitbeschränkte Version des Programms. Sie dient allein zum Test der Hardware des Lizenznehmers in dessen eigener Verantwortung. Eine Pflicht zum Erwerb wie auch eine Pflicht zur Vergabe der Lizenz für die Vollversion des Programms wird mit einem Erwerb (Download, Zeitschriften etc.) einer Testversion nicht begründet. Wird das Programm hingegen von Distributoren verkauft, besteht für den Käufer das Recht auf Vergabe einer Lizenz.

### 5. Lizenzumfang

Der Lizenznehmer ist berechtigt die Software auf einem Arbeitsplatzrechner zu installieren und bestimmungsgemäß zu nutzen. Er ist jedoch nicht berechtigt die Software einem Dritten zu überlassen oder auf sonstige Weise zugänglich zu machen.

### 6. Gewährleistung und Verantwortlichkeit

Der Lizenzgeber leistet Gewähr für eine im Sinne der Beschreibung und der Benutzungsanleitung grundsätzlich brauchbare Software und behält sich das Recht vor die Software nach eigenem Ermessen zu korrigieren, zu ändern oder neue Versionen herzustellen.

Der Lizenznehmer ist allein dafür verantwortlich, dass die von ihm eingesetzte Hardware und das hierauf installierte Betriebssystem den vom Programm vorausgesetzten Anforderungen genügt und entsprechend konfiguriert ist, so dass das Programm störungsfrei laufen kann.

### 7. Programmpflege

Der Lizenzgeber ist berechtigt das Programm nach eigenem Ermessen zu ändern, an geänderte rechtliche oder technische Vorgaben anzupassen und neue Versionen herzustellen. In diesen Fällen

---

erfolgt eine Anpassung der vom Lizenznehmer genutzten Programmversion (Updating) nur auf dessen Wunsch und nur innerhalb der vom Lizenzgeber jeweils festgesetzten Zeitspanne (Update-Aktion) gegen Zahlung des für das jeweilige Update festgelegten Preises. Einer Anpassung ist nur die der neuen Version unmittelbar vorhergehende Programmversion zugänglich.

#### 8. Support

Der Lizenzgeber unterhält im Rahmen seiner betrieblichen Möglichkeiten werktätlich Montag bis Donnerstag in der Zeit von **19.00 bis 20.00 Uhr unter Telefon +49 163 3735575** einen Auskunftservice zu Fragen, welche unmittelbar die Nutzung des Programms in seiner aktuellen Version betreffen (Hotline). Anfragen werden nur (fern-)mündlich, nicht jedoch schriftlich beantwortet. Schriftliche Anfragen bleiben daher unbeantwortet.

#### 9. Haftung

Die Haftung des Lizenzgebers für etwaige bei oder aus Anlass der Nutzung des Programms entstandene Schäden ist beschränkt auf Vorsatz oder grobe Fahrlässigkeit. Die Haftung für Mangel- folgeschäden ist ausgeschlossen.

#### 10. Zahlungsbedingungen

Die Lieferung des zur Entriegelung des Programms erforderlichen Lizenzcodes erfolgt nur nach Vorkasse. Schecks werden nur erfüllungshalber und nicht an Zahlungs statt angenommen.

### Formelzeichen

Kapital in EUR	K
Jahreszins in %	jZ
Jahreszins (als Faktor)	jZF
Monatszins in %	mZ
Monatszins (als Faktor)	mZF
Kreditbetrag bei Ratenkrediten in EUR	G
Bearbeitungsgebühr in %	Gb
Rate eines Ratenkredites in EUR	R
Kaufpreis (Ausgabekurs) in %	C
Kaufpreis in EUR	KP
Auszahlungsbetrag (Dividende) in EUR	D
Rückzahlungskurs in %	Rk
Rückzahlungsbetrag in EUR	RB
Barwert in EUR	BW
Endwert in EUR	EW
Laufzeitindex für Monate	m
Laufzeitindex für Jahre	j
Index (Name) eines Wertpapiers	p
Allgemeiner Integer	i
Jahresnominalzins in %	jnZ
Aufzinsungsfaktor	azF
Rendite in %	Re
Restschuld in EUR	RS
Hilfsfaktor	h
Kreditvolumen (Annuitätendarlehen) in EUR	KV
Anzahl der Raten pro Jahr	rj
Tage bis zur ersten Rate	T
Zinsfestschreibung (Bindung)	ZFS
Tilgungsfreie Jahre	TF
Tilgungsverrechnungen pro Jahr	TV
Anfängliche Tilgung in %	TI
Annuität in EUR	A
Auszahlungskurs Annuitätendarlehen in %	KA
Anlagebetrag in EUR	AB
Kontogutschrift in EUR pro Monat	KGS
Monatlicher Anlagebetrag in EUR	mAB
Zinsgutschrift in EUR	ZG
Monatliche Rente in EUR	mRente
Jährliche Rente in EUR	jRente
Restkapital in EUR	Rest



### 3 Zinsrechnung

Im Zuge dieses Handbuchs wird auf eine Einführung in die Prozent- und Zinsrechnung verzichtet. Es wird vorausgesetzt, dass der Leser mathematische Formeln interpretieren kann und den Umgang mit Exponenten versteht. Darüber hinaus sollte ein Taschenrechner ohne Probleme bedient werden können.

Es ist aber notwendig zur eindeutigen Identifikation der verwendeten Variablen einige Grundgleichungen aufzuschreiben.

Nach [2] ist der Zins „...ein Preis für die Überlassung von Kapital...“. Aus historischem Grund spricht man auch heute vorrangig von Jahreszinsen. So wächst ein Kapital  $K$  bei jährlichem Zinszuschlag in  $j$  Jahren bei Anwendung eines jährlichen Aufzinsungsfaktors  $jZF$  auf folgenden Endbetrag:

$$K_j = K \cdot jZF^j \quad (\text{G3-1})$$

Der Zins wird in % angegeben. Im Zuge einer praktischen Anwendung rechnet man den Zinssatz jedoch besser in Aufzinsungs- bzw. Abzinsungsfaktoren um. In Gleichung G3-1 berechnet sich die Variable  $jZF$  aus:

$$jZF = \frac{jZ}{100} + 1 \quad (\text{G3-2})$$

Aus Gleichung G3-1 entnimmt man auch sofort, dass die Wirkung von Zins und Zinseszins nichtlineare Gestalt annimmt. In der heutigen Finanzwelt spielen aber eher unterjährliche Zahlungen eine primäre Rolle. Insofern entsteht sofort die Frage, wie ein Jahreszins in einen Monats- oder gar Tageszins umgerechnet werden kann.

Die Division durch 12 eines Jahreszinses zur Ermittlung eines Monatszinses wird in der Praxis oft angewendet, stellt jedoch keine exakte Lösung dar.

Vielmehr berechnet sich der monatliche effektive Aufzinsungsfaktor  $mZF$  entsprechend Gleichung G3-3

$$mZF = \sqrt[12]{\frac{jZ}{100} + 1} \quad (\text{G3-3})$$

und der entsprechende Nominalzinssatz aus:

$$mZF_{nom} = \frac{jZ}{1200} + 1 \quad (\text{G3-4})$$

Somit ergibt sich für einen Jahreszins von 12 % ein **monatlicher nominaler** Zinsfaktor von 1.0100 und ein **monatlicher effektiver** Zinsfaktor von 1.0095.

Gleichungen G3-3 und G3-4 können auch für tägliche Aufzinsung abgeändert werden und es ergibt sich ein täglicher effektiver Zinsfaktor  $tZF$ :

$$tZF = \sqrt[360]{\frac{jZ}{100} + 1} \quad (G3-5)$$

und wiederum der entsprechende Nominalzinssatz:

$$tZF_{nom} = \frac{jZ}{36000} + 1 \quad (G3-6)$$

Für einen Jahreszins von 12 % ergibt sich so ein **täglicher nominaler** Zinsfaktor von 1.000333 und ein **täglicher effektiver** Zinsfaktor von 1.000315.

Der monatliche Aufzinsungsfaktor  $mZF$  wird auch in weiteren Kapiteln noch eine zentrale Rolle spielen.

Die Berücksichtigung von unterjähriger Verzinsung kann bei der Beurteilung finanzmathematischer Probleme eine zentrale Rolle spielen, insbesondere dann, wenn sich Kontostände unterjährig ändern.

Finden unterjährige Zahlungen statt, muss unterjährig verzinst werden.

Abbildung A3-1 zeigt den Zinsverlauf einer Anlage von 100.- EUR über 10 Jahre, wobei die Zinsen von 12 % p.a. jeden Tag bzw. jedes Jahr wieder angelegt werden.

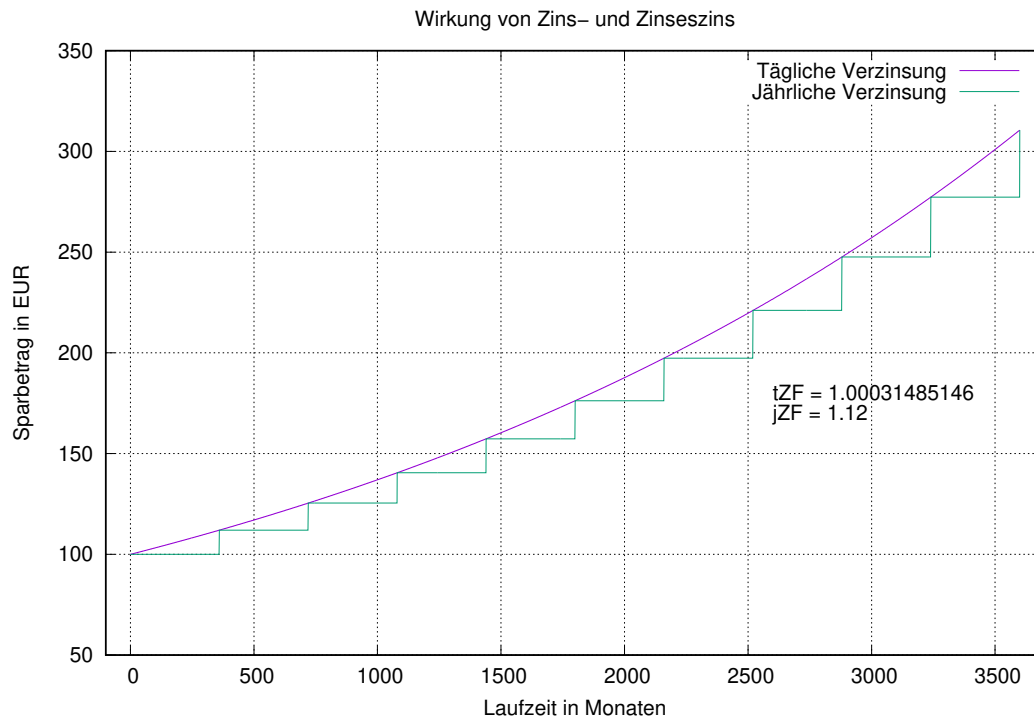


Abbildung A3-1: Anwendung des Zinssatzes

Die Darstellung verdeutlicht, dass die mathematischen „Stützstellen“ bei jährlicher und täglicher Verzinsung jeweils nach Ablauf von einem Jahr identisch sind.

Für jährliche Verzinsung gilt somit:

$$100 \cdot 1.12^{10} = 310.584820834 \quad (\text{G3-7})$$

und für tägliche Verzinsung:

$$100 \cdot 1.00031485146^{3600} = 310.584820834 \quad (\text{G3-8})$$

Beide Berechnungsarten liefern zum Ende der Laufzeit somit das gleiche Ergebnis von 310.58 EUR.

### 3.1 Effektivzins für unterjährige Verzinsung

Mit Blick auf Gleichungen G3-1 bis G3-4 und bestimmten Voraussetzungen kann ein Nominalzins auch in einen entsprechenden Effektivzins (und umgekehrt) umgerechnet werden.

$$jZ = \left( \frac{jZ_{nom}}{inc} + 1 \right)^{inc} - 1 \quad (G3-9)$$

Gleichung G3-9 läßt sich natürlich auch nach  $jZ_{nom}$  auflösen und es entsteht:

$$jZ_{nom} = inc \cdot \sqrt[inc]{jZ + 1} - inc \quad (G3-10)$$

Für monatliche Zinszahlungen und einem Nominalzinssatz von 5,08 % p.a. ergibt sich demnach:

$$jZ = \left( \frac{0.0508}{12} + 1 \right)^{12} - 1 \quad (G3-11)$$

Als Ergebnis erhält man nun  $jZ = 0.05199964$ . Dies entspricht einem effektiven Jahreszins von 5.2 % p.a.

Vergleiche hierzu auch Gleichung G9-56 in Abschnitt 9.1.

Abbildung A3-2 zeigt den Zusammenhang eines Nominalzinses zu Effektivzins.

### 3.1 Effektivzins für unterjährige Verzinsung

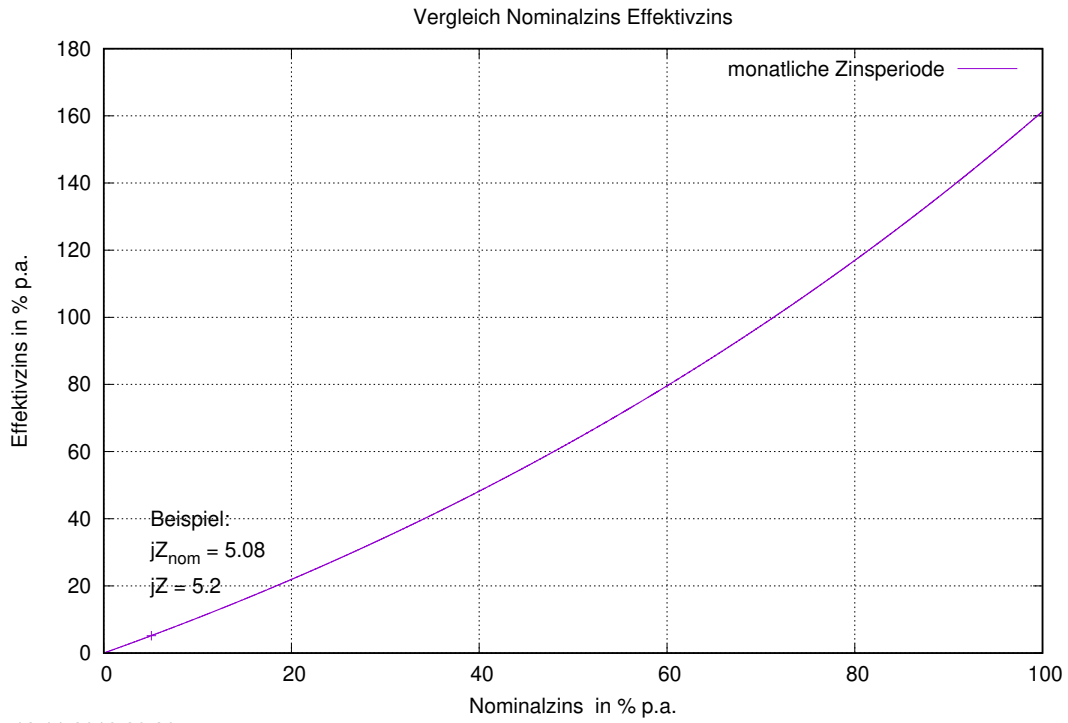


Abbildung A3-2: Nominalzins vs. Effektivzins

### 4 Sparen

Sparen ist wichtig! Jeder Haushalt muss Rücklagen haben um nicht erwartete Ausgaben abzufedern, Engpässe zu überstehen oder Investitionen der Zukunft tätigen zu können. Die Frage, welche Anlageform die richtige ist, hängt daher von den angestrebten Zielen ab.

In Unabhängigkeit, ob strategische / ferne Ziele verfolgt werden oder eine Anschaffung in nächster Zeit ansteht, spielt die Frage nach maximaler Rendite des angelegten Geldes eine zentrale Rolle. Somit ist sicherlich „Omas Sparbuch“ aus Sicht der heutigen Möglichkeiten eher nicht mehr die ideale Sparform, andererseits müssen Fragen nach der Sicherheit von Einlagen zunehmend kritischer bewertet werden.

Sieht man sich auf dem Markt um, wird sehr schnell deutlich, dass die Anbieter durchaus mit hohen Gewinnchancen werben. Man muss aber genauso schnell akzeptieren, dass ein in Aussicht gestellter Gewinn von der Risikobereitschaft abhängig gemacht wird.

Der Anleger ist also gut beraten, wenn er einen Teil seines Geldes *sicher* anlegt und mit einem anderen, kleineren Teil eher risikobehaftete Anlagen wählt.

So hat sich beispielsweise gezeigt, dass das Risiko Aktie minimiert werden kann, wenn der Anleger bereit ist (und die Möglichkeiten hat) über lange Zeiträume die Anteile zu halten.

Der sicherste Weg an der Börse ein kleines Vermögen zu verdienen, ist mit einem großen anzufangen.

Einen idealen Weg zur Anlage Ihres Vermögens kann *ZinsMath* natürlich auch nicht anbieten. Letztlich können auch steuerliche Aspekte das Entscheidungsverhalten mitbestimmen. Wenden Sie sich gegebenenfalls an einen entsprechenden Berater.

In jedem Fall haben Sie aber mit *ZinsMath* die Möglichkeit entsprechende Angebote zu prüfen und nachzuvollziehen.

## 4.1 Festgeld

### 4.1 Festgeld

Die Anlage „Festgeld (festverzinslich)“ spielt immer wieder eine wichtige Rolle. Grund dafür sind die möglichen kurzen Laufzeiten. Ist man auf einen relativ schnellen Zugriff angewiesen, kann die Form des Festgeldes ein geeignetes Sparmodell darstellen. Für gewöhnlich laufen Festgeldverträge über ganze Monate, aber auch die Zinsfestschreibung über einige Tage ist üblich. Die Berechnung gestaltet sich recht einfach, da die garantierten Zinserträge zunächst auf ein Jahr berechnet werden und anschließend anteilmäßig pro Monat, oder eben pro Tag, gutgeschrieben werden.

Oftmals werden die taggenauen, monatlichen etc. Zinsen nicht sofort wieder angelegt. Es macht mit Blick auf diesen Sachverhalt Sinn, hierzu die Banken zu befragen, welche Form der Zinsanlage berücksichtigt wird.

In Tabelle T4-1 ist ein Beispielkontoverlauf für einen virtuellen Festgeldvertrag von 12% p.a. dargestellt.

Monat	Anlage	Zinsgutschrift	Kontostand
	1000 EUR		
1		10 EUR	1010 EUR
2		10 EUR	1020 EUR
		⋮	
12		10 EUR	1120 EUR
		⋮	
18		10 EUR	1180 EUR
		⋮	
24		10 EUR	1240 EUR

Tabelle T4-1: Kapitalzuwachs einer Festgeldanlage

Die monatliche Kontogutschrift KGS berechnet sich unter Berücksichtigung des Anlagebetrages AB wie folgt:

$$KGS = \frac{AB \cdot jZF - AB}{12} \quad (G4-12)$$

Der Kontostand zum Ende der Laufzeit wird somit berechnet:

$$RZB = AB + m \cdot KGS \quad (G4-13)$$

Für das betrachtete Beispiel ergibt sich für eine Laufzeit von 24 Monaten ein Rückzahlungsbetrag RZB von 1240.- EUR. Man muss an dieser Stelle darauf hinweisen, dass das vorgestellte Berechnungsverfahren nur eine Näherung zum Nachteil des Anlegers darstellt. Berücksichtigt man den Einfluss von Zins und Zinseszins, müsste entsprechend der Vorschrift von Gleichung G3-1 geschrieben werden:

$$RZB = 1000 \cdot 1.12^2 \quad (G4-14)$$

Der Rückzahlungsbetrag RZB würde in diesem Fall mit 1254.40 EUR berechnet. Man sollte auch hier wieder auf die Wirkungen von Zins und Zinseszins bei unterjähriger Anwendung hinweisen.



## 4.2 Ratensparen

---

### 4.2 Ratensparen

Gegenüber der klassischen Festgeldanlage bietet das Ratensparen insofern Vorteile, dass auch während der Laufzeit Sparbeträge „hinzugezahlt“ werden. Diese Beträge sind monatlich fällig und gleich groß.

In der Tat verlocken die Banken mit ihren Angeboten nicht dazu sich für eine solche Anlage zu entscheiden. Dennoch bietet diese Konstruktion einige Vorteile die zu schätzen sind. Die Banken sind bereit (zum Teil nur auf Nachfrage) diese Sparform mit sehr kurzen Kündigungsfristen zu versehen. Oftmals wird hierzu nur ein separates Konto eröffnet, welches jederzeit belastet werden kann. Genau dort liegt ein gewisser Vorteil. Bevor man somit den Fehler begeht alles „verbleibende“ Geld am Monatsende auf dem Girokonto zu belassen, kann das Ratensparen sehr nützlich sein. Immerhin wird der zugesicherte Zins über dem des Girokontos liegen. Ist dann eine gewisse Summe angespart, hat man natürlich sehr schnell die Möglichkeit andere Sparformen zu wählen.

Beim Ratensparen gibt es die Möglichkeit, ähnlich wie bei der Festgeldanlage, ein Startkapital einzusetzen. Man unterscheidet somit folgende zwei Formen:

- Zahlung eines monatlichen Sparbetrages  
Berechnung der Zinsgutschrift ZG nach Gleichung [G4-15](#)
- Zahlung eines monatlichen Sparbetrages, zu Beginn des Sparvertrages wird jedoch ein „Startgeld“ berücksichtigt  
Berechnung der Zinsgutschrift ZG nach Gleichung [G4-16](#)

Für genannte Anfangsbedingungen wird in den Gleichungen [G4-15](#) beziehungsweise [G4-16](#) die Zinsgutschrift ZG berechnet:

$$ZG = AB \cdot mZF^m - AB \quad (G4-15)$$

$$ZG = \left( AB \cdot mZF^m - AB \right) + \left[ \sum_{m=1}^m mAB \cdot mZF^m - mAB \right] \quad (G4-16)$$

In Unabhängigkeit, ob zu Beginn der Sparzeit ein Anfangskapital eingesetzt wird, ist für den Rückzahlungsbetrag RZB zu schreiben:

$$RZB = AB + m \cdot mAB + ZG \quad (G4-17)$$

Im Folgenden soll auch hier ein virtueller Ratensparplan zum besseren Verständnis vorgestellt werden. In Tabelle [T4-2](#) sind wir von einem Anfangskapital von 5000.- EUR ausgegangen, wobei über eine Laufzeit von 36 Monaten jeweils 150.- EUR eingezahlt werden. Der angegebene Algorithmus zur Berechnung des Rückzahlungsbetrages RZB ist auch hier wieder nur gültig für unterjährige Verzinsung.

Anlagebetrag AB:	5000.- EUR
Monatlicher Anlagebetrag mAB:	150.- EUR
Jahreszins jZ:	2.5 % p.a.
Laufzeit m:	36 Monate
Einzahlungen:	10400.- EUR
Zinsgewinn ZG	595.26 EUR
Rückzahlungsbetrag RZB	10995.26 EUR

Tabelle T4-2: Ratensparen - Beispiel

In Abbildung A4-3 ist der Kontoverlauf bezüglich genannten Beispiels zu sehen. Der Rückzahlungsbetrag RZB hat durch die Wirkung von Zins- und Zinseszins nichtlinearen Charakter.

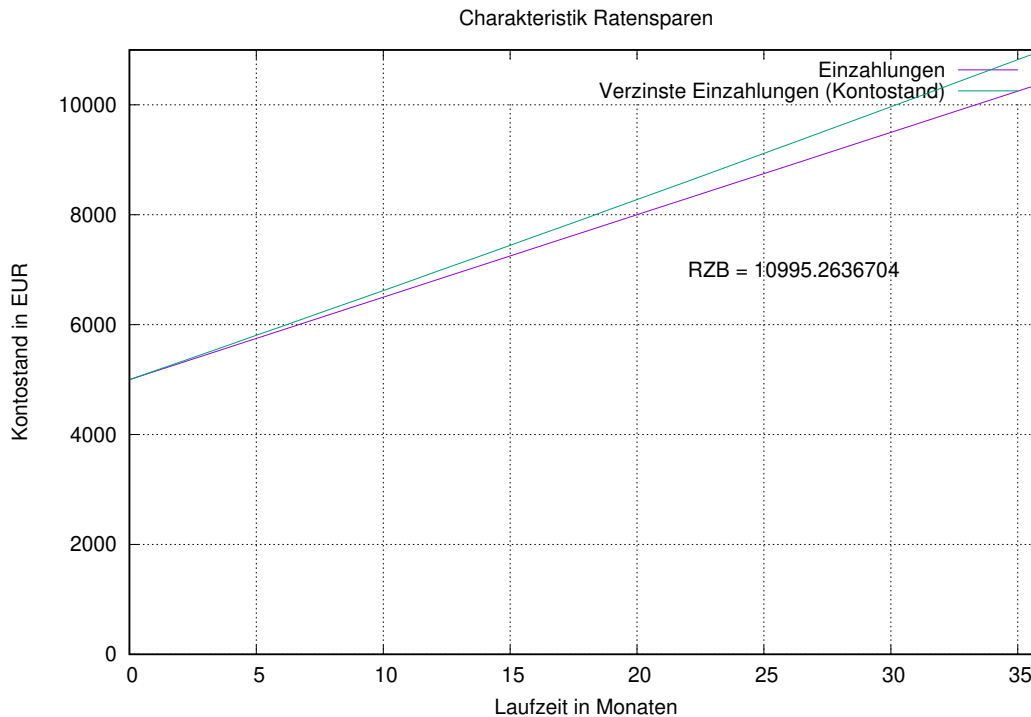


Abbildung A4-3: Kontoverlauf Ratensparen

Zusammenfassend kann bezüglich des Ratensparens erwähnt werden: Bevor man eine höherrenditeversprechende Sparform (Aktien, Fonds) wählt, muss ein Anfangskapital geschaffen werden. Hierbei hilft das Ratensparen, da es gegenüber dem Girokonto höhere Zinsgewinne bringt. Kündigungsfristen sind zu beachten!

## 4.3 Endwertberechnung (Future Value)

---

### 4.3 Endwertberechnung (Future Value)

Ausgehend von Gleichungen G3-1 und G3-2 lautet die Formel zur Berechnung des Endwertes eines Kapitals:

$$K_j = K \cdot \left( \frac{jZ}{100} + 1 \right)^j \quad (\text{G4-18})$$

Für ein gegebenes Kapital von 100 EUR, einem Jahreszins von 6 % und einer Laufzeit von 5 Jahren ergibt sich ein Endwert von 133.82 EUR.

### 4.4 Barwertberechnung (Present Value)

Ausgehend von Gleichung G4-18 kann der heutige Barwert eines zukünftigen Zahlungsstromes bei bekanntem Endwert berechnet werden. Die Gleichung hierfür lautet:

$$BW = K_j = \frac{EW}{\left(\frac{jZ}{100} + 1\right)^j} \quad (\text{G4-19})$$

Der Barwert eines heutigen Kapitals von 100 EUR, einem Jahreszins von 6 % und einer Laufzeit von 5 Jahren beträgt 74.73 EUR.

## 4.5 Zinsberechnung aus Barwert und Endwert

---

### 4.5 Zinsberechnung aus Barwert und Endwert

Ausgehend von Gleichung G4-19 kann aus gegebenem Barwert, Endwert und einer Laufzeit ein entsprechender (benötigter) Zinssatz berechnet werden. Die Formel hierfür lautet:

$$\frac{jZ}{100} + 1 = \sqrt[i]{\frac{EW}{BW}} \quad (\text{G4-20})$$

Ein Kapital (Barwert) von 750.00 EUR muss für eine Laufzeit von 8 Jahren zu 3.66 % angelegt werden, damit das zurück erhaltene Kapital (Endwert) 1000.00 EUR beträgt.

## 5 Versicherungen

### 5.1 Kapitalbildene Lebensversicherungen mit festen Prämien

Anhand eines wiederum virtuellen Beispiels soll nun die Renditeberechnung einer Kapitalbildenden Lebensversicherung ohne Dynamisierung (monatlich gleiche Zahlungen) vorgestellt werden. In Tabelle T5-3 sind die für die Berechnung notwendigen Konditionen angegeben.

Monatlicher Anlagebetrag mAB:	100.- EUR
Jährliche Dynamisierung:	keine
Monatszins mZF:	gesucht
Laufzeit m:	240 Monate
Summe der Einzahlungen (Prämien):	24000.00 EUR
Rückzahlungsbetrag RZB	29471.75 EUR

Tabelle T5-3: Kapitalbildende Lebensversicherung ohne Dynamik - Beispiel

Für den Zahlungsverlauf kann Gleichung G5-21 geschrieben werden. Aus Gründen der Übersicht bezieht sich die linke Seite der Gleichung nur auf die ersten 3 Zahlungen; also die ersten 3 Monate.

$$(((100 \cdot mZF) + 100) \cdot mZF) + 100) \cdot mZF \cdot \dots \equiv 29471.75 \quad (\text{G5-21})$$

In einer allgemeinen Form lässt sich für die Einzahlungen mAB, welche monatlich mit dem Faktor mZF verzinst werden müssen, Gleichung G5-22 schreiben. Die Variable m ist dabei die Laufzeit der Versicherung in Monaten.

$$mAB \cdot \left( \sum_{m=0}^{m-1} mZF^m \right) \cdot mZF \equiv RZB \quad (\text{G5-22})$$

Man beachte hier nun, dass die gesuchte Größe in Gleichung G5-22 der Monatszinsfaktor mZF ist. *Zins-Math* ermittelt die Lösung auf numerischem Weg. Für dieses Beispiel ergibt sich ein monatlicher Zinsfaktor von 1.0016515813. Nach Auflösung von Gleichung G3-3 nach jZ kann der Jahreszins berechnet werden:

$$jZ = \left( mZF^{12} - 1 \right) \cdot 100 \quad (\text{G5-23})$$

Und es ergibt sich ein effektiver Jahreszins von 2.00 %, wobei während der Laufzeit 24000.- EUR eingezahlt wurden.

Natürlich kann für dieses Modell auch der Zahlungsverlauf angegeben werden, welcher in Tabelle T5-4 in übersichtlicher Weise dargestellt wird.

## 5.1 Kapitalbildene Lebensversicherungen mit festen Prämien

---

Monat	Anlage	Kontostand
1	100 EUR	100.16 EUR
2	100 EUR	200.49 EUR
3	100 EUR	300.99 EUR
4	100 EUR	401.65 EUR
5	100 EUR	502.48 EUR
6	100 EUR	603.47 EUR
	:	
235	100 EUR	28731.22 EUR
236	100 EUR	28878.84 EUR
237	100 EUR	29026.70 EUR
238	100 EUR	29174.80 EUR
239	100 EUR	29323.15 EUR
240	100 EUR	29471.75 EUR

Tabelle T5-4: Kapitalzuwachs einer Lebensversicherung ohne Dynamik

## 5.2 Kapitalbildene Lebensversicherungen mit Dynamik

Gegenüber der vorhergehenden Berechnung einer Kapitalbildenden Lebensversicherung bieten die Versicherer auch Dynamisierung der Einzahlungen an. Das heißt, die Einzahlungen werden pro Jahr um einen prozentuellen Anteil erhöht. In Abhängigkeit der Laufzeit sollte diese Erhöhung maximal zwischen 3% und 5 % liegen.

Wiederum soll im Zuge eines Beispiels die Renditeberechnung erläutert werden. In Tabelle T5-5 sind die für die Berechnung notwendigen Konditionen angegeben.

Monatlicher Anlagebetrag $mAB$ :	100.- EUR
Jährliche Dynamisierung:	5 %
Monatszins $mZF$ :	gesucht
Laufzeit $m$ :	240 Monate
Rückzahlungsbetrag $RZB$	47198.33 EUR

Tabelle T5-5: Kapitalbildende Lebensversicherung mit Dynamik - Beispiel

Für den Fall, dass man sich für einen derartigen Vertrag entscheidet, ist bei der Wahl der dynamischen Erhöhung entsprechende Vorsicht zu wahren. Die Beitragshöhe im letzten Versicherungsjahr berechnet sich für dieses Beispiel und einer Laufzeit von 20 Jahren, aus:

$$100 \cdot 1.05^{19} = 252.69$$

Im letzten Versicherungsjahr müssten somit monatlich 252.69 EUR berappt werden, die Beitragshöhe hätte sich deutlich erhöht. Man sollte somit sorgfältig prüfen, ob die Beitragshöhe über die gesamte Laufzeit den Wünschen und der Leistungsfähigkeit entspricht.

Der Zahlungsverlauf für ein solches Modell lässt sich aus Gleichung G5-21 ableiten. Allerdings muss nach jeweils 12 Monaten der Betrag  $mAB$  angepasst werden. Für vorgestelltes Beispiel kann also eine Gleichung folgender Form geschrieben werden:

$$RZB \equiv \left( \dots \right) + \sum_{m=25}^{36} mAB_1 \cdot mZF^m + \sum_{m=13}^{24} mAB_2 \cdot mZF^m + \sum_{m=1}^{12} mAB_3 \cdot mZF^m \quad (G5-24)$$

In Gleichung G5-24 ist  $mAB_1 = 100$ ,  $mAB_2 = 105$  und  $mAB_3 = 110.25$ . Die gesuchte Größe ist natürlich der monatliche Aufzinsungsfaktor  $mZF$ . Glücklicherweise übernimmt *ZinsMath* die Lösung des Gleichungssystems. Für das Beispiel ist  $mZF = 1.0016515813$  eine Lösung. Der effektive Jahreszins beträgt somit, gleichermaßen des vorherigen Abschnittes, 2.00 %.

In Tabelle T5-6 sind die wichtigen Ergebnisse der beiden Formen der Kapitalbildenden Lebensversicherungen gegenübergestellt.



## 5.2 Kapitalbildene Lebensversicherungen mit Dynamik

	KLV nach Abschnitt 5.1	KLV nach Abschnitt 5.2
Summe der Beitragszahlungen	24000.00 EUR	39679.14 EUR
Rückzahlungsbetrag	29471.75 EUR	47198.33 EUR
Rendite	2.00 %	2.00 %

Tabelle T5-6: Renditevergleich zweier Kapitalbildender Lebensversicherungen

Auch für dieses Rechenbeispiel kann der Zahlungsverlauf angegeben werden. Tabelle T5-7 listet die entsprechenden Beitragszahlungen und die jeweiligen Anteile an der Gesamtverzinsung auf.

Monat	Anlage	Kontostand
1	100 EUR	100.16 EUR
2	100 EUR	200.49 EUR
3	100 EUR	300.99 EUR
4	100 EUR	401.65 EUR
5	100 EUR	502.48 EUR
6	100 EUR	603.47 EUR
	⋮	
235	252.69 EUR	45551.18 EUR
236	252.69 EUR	45879.52 EUR
237	252.69 EUR	46208.41 EUR
238	252.69 EUR	46537.84 EUR
239	252.69 EUR	46867.81 EUR
240	252.69 EUR	47198.33 EUR

Tabelle T5-7: Kapitalzuwachs einer Lebensversicherung mit Dynamik

Ist man in der Lage ein dynamisches Wachsen der Beitragszahlungen über die ganze Laufzeit erbringen zu wollen, ist diese Form der Lebensversicherung ein interessantes Ansparmodell.

Der Rückzahlungsbetrag RZB wird von den Versicherungen nicht garantiert.

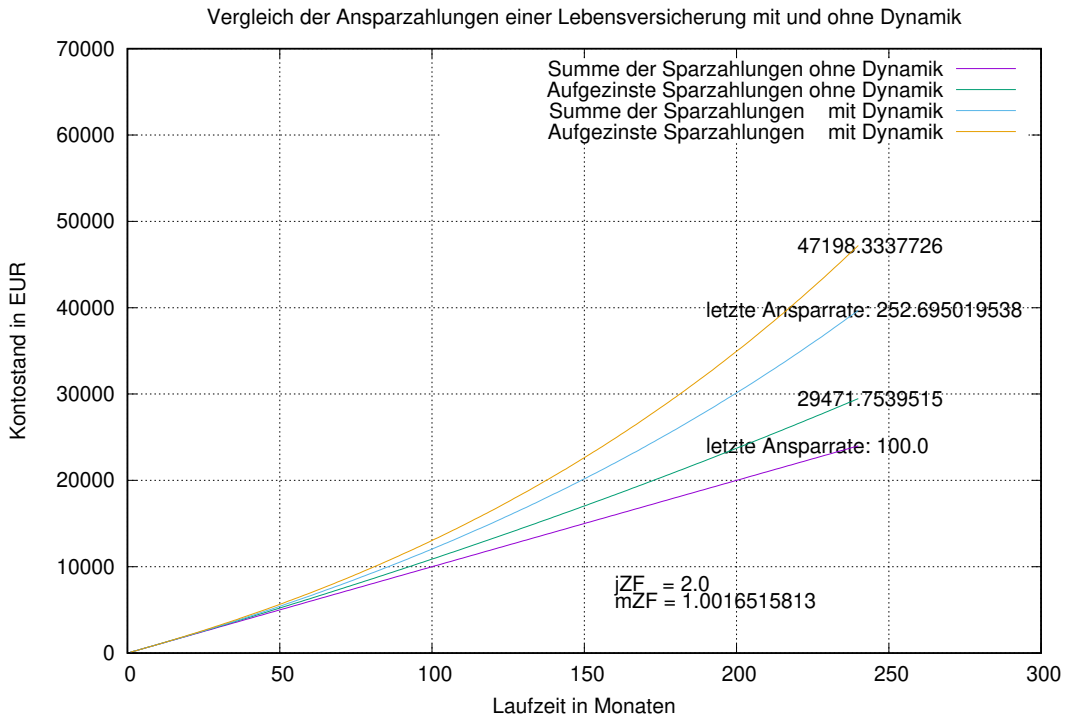


Abbildung A5-4: Lebensversicherung

## 6.1 Festverzinsliche Wertpapiere mit Zinsauszahlung

# 6 Wertpapiere

## 6.1 Festverzinsliche Wertpapiere mit Zinsauszahlung

In nunmehr gewohnter Weise soll der in *ZinsMath* verwendete Algorithmus zur Berechnung der Rendite eines festverzinslichen Wertpapiers vorgestellt werden, siehe hierfür Gleichung G6-25. Die gesuchte Größe ist der jährliche Aufzinsungsfaktor  $azF$ , der die Rendite widerspiegelt.

$$C = \sum_{j=1}^j \frac{jnZ}{azF^j} + \frac{Rk}{azF^j} \quad (\text{G6-25})$$

Die kurze Betrachtung der Gleichung G6-25 lässt sofort erkennen, dass offensichtlich der wertmäßige Betrag (in EUR) eines Wertpapiers für die Renditeberechnung keine Rolle spielt. Nur die in Abschnitt 6 angegebenen Größen werden benötigt. Ein solcher Sachverhalt erscheint auch sinnvoll, da für die Renditeberechnung die Anzahl der erworbenen Wertpapiere (ein und desselben!) keine Rolle spielen darf.

Natürlich soll auch hier ein (virtuelles) Beispiel vorgestellt werden. Für die Beispielrechnung sollen folgende Konditionen gelten:

Ausgabekurs C in %:	90
Rückzahlungskurs Rk in %	102
Jahreszins jZ in %	5
Laufzeit j in Jahren	4

Tabelle T6-8: Festverzinsliche Wertpapiere mit Zinsauszahlung

Entsprechend Gleichung T6-8 müssen die Werte der Beispielrechnung nur eingesetzt werden. Somit lässt sich folgende, etwas unbequeme Gleichung aufschreiben:

$$90 \equiv \frac{5}{azF} + \frac{5}{azF^2} + \frac{5}{azF^3} + \frac{5}{azF^4} + \frac{102}{azF^4} \quad (\text{G6-26})$$

Wie anfänglich beschrieben, stellt  $azF$  einen Aufzinsungsfaktor dar. Die Rendite  $Re$  berechnet sich aus Gleichung G6-26 letztlich aus:

$$Re = 1 + \frac{azF}{100} \quad (\text{G6-27})$$

In Unabhängigkeit der Laufzeit und der vorgegebenen Werte berechnet *ZinsMath* die Rendite des Beispiels mit  $Re=8.4930\%$ .

Das Ergebnis könnte einen Hinweis darauf geben, dass es sich hierbei um ein, wie angegeben, virtuelles Beispiel handelt. Derartige Erträge können aber bei sorgfältiger Auswahl erzielt werden.

## 6.2 Festverzinsliche Wertpapiere mit Zinsansammlung

### 6.2 Festverzinsliche Wertpapiere mit Zinsansammlung

Die Formel zur Renditeberechnung lautet:

$$Re = \left( \sqrt[j]{\frac{R}{C}} - 1 \right) \cdot 100 \quad (\text{G6-28})$$

Gleichung G6-28 ist identisch zu Gleichung G6-32 jedoch vereinfacht sich die Berechnung der Variable  $R_k$  durch die Gleichheit der jährlichen Zinsen zu:

$$R = R_k \cdot azF^j \quad (\text{G6-29})$$

Auch hier soll wieder ein (virtuelles) Beispiel vorgestellt werden. Für die Beispielrechnung sollen folgende Konditionen gelten:

Ausgabekurs C in %:	90
Rückzahlungskurs $R_k$ in %	102
Jahreszinsnominalzins in %	5
Laufzeit j in Jahren	4

Tabelle T6-9: Festverzinsliche Wertpapiere mit Zinsansammlung

Mit Blick auf Gleichung G6-28 und G6-29 müssen die Werte der Beispielrechnung nur eingesetzt werden.

$$Re = \left( \sqrt[4]{\frac{102 \cdot 1.05^4}{90}} - 1 \right) \cdot 100 \quad (\text{G6-30})$$

Somit ergibt sich hier eine Rendite von  $Re=8.337\%$ .

### 6.3 Wertpapiere mit variablem Zins und Zinsauszahlung

Grundlage für die Berechnung ist Gleichung G6-25. Für die Beispielrechnung sollen folgende Konditionen gelten:

Ausgabekurs C in %:	90
Rückzahlungskurs Rk in %	102
Jahreszins 1. Jahr jZ in %	1
Jahreszins 2. Jahr jZ in %	2
Jahreszins 3. Jahr jZ in %	3
Jahreszins 4. Jahr jZ in %	4
Laufzeit j in Jahren	4

Tabelle T6-10: Wertpapiere mit variablem Zins und Zinsauszahlung

Mit Blick auf Gleichung G6-26 müssen die Werte der Beispielrechnung nur eingesetzt werden.

$$90 \equiv \frac{1}{azF} + \frac{2}{azF^2} + \frac{3}{azF^3} + \frac{4}{azF^4} + \frac{102}{azF^4} \quad (\text{G6-31})$$

Für diese Werte und unter verwendung der Gleichung G6-27 berechnet *ZinsMath* die Rendite des Beispiels mit  $Re=5.758\%$ .

## 6.4 Wertpapiere mit variablem Zins und Zinsansammlung

### 6.4 Wertpapiere mit variablem Zins und Zinsansammlung

Grundlage für die Berechnung ist Gleichung G6-32.

$$Re = \left( \sqrt[j]{\frac{R}{C}} - 1 \right) \cdot 100 \quad (\text{G6-32})$$

Für die Beispielrechnung sollen folgende Konditionen gelten:

Ausgabekurs C in %:	90
Rückzahlungskurs Rk in %	102
Jahreszins 1. Jahr jZ in %	1
Jahreszins 2. Jahr jZ in %	2
Jahreszins 3. Jahr jZ in %	3
Jahreszins 4. Jahr jZ in %	4
Laufzeit j in Jahren	4

Tabelle T6-11: Wertpapiere mit variablem Zins und Zinsansammlung

Mit Blick auf Gleichung G6-32 kann nun geschrieben werden.

$$R = 102 \cdot 1.01 \cdot 1.02 \cdot 1.03 \cdot 1.04 \quad (\text{G6-33})$$

$$Re = \left( \sqrt[4]{\frac{112.562}{90}} - 1 \right) \cdot 100 \quad (\text{G6-34})$$

Für diese Werte berechnet *ZinsMath* die Rendite des Beispiels mit  $Re=5.751\%$ .

### 6.5 Bundeswertpapiere

Zu den deutschen Bundeswertpapieren gehören die Bundesschatzbriefe, welche in zwei Formen angeboten werden, dem Typ A und dem Typ B. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass bei der Anlageform A die Zinsen während der Laufzeit jedes Jahr ausgezahlt werden, beim Typ B werden hingegen die Zinsen neu angelegt. Die Zinssätze können dabei von Jahr zu Jahr unterschiedlich sein. Auch bezüglich der Laufzeiten unterscheiden sich die beiden Anlagen. Typ A läuft 6 Jahre und Typ B hat eine Laufzeit von 7 Jahren. Beide Anlageformen erlauben Stückelungen von 100 EUR. Banken fordern Aufbewahrungsgebühren (Kontoführungs- bzw. Depotgebühren). Man kann diese Kosten umgehen, wenn man das Papier bei der Bundesschuldenverwaltung hinterlegt.

Für festverzinsliche Wertpapiere mit jährlicher Zinszahlung und einer Laufzeit von  $j$  Jahren lässt sich für die Berechnung der Rendite folgende Gleichung aufschreiben:

$$C = \frac{jnZ}{azF} + \frac{jnZ}{azF^2} + \dots + \frac{jnZ}{azF^j} + \frac{Rk}{azF^j} \quad (\text{G6-35})$$

Der Aufzinsungsfaktor  $azF$  ergibt sich aus Gleichung [G6-36](#). Somit lässt sich beispielsweise für einen Zinssatz von 3 % ein gut anwendbarer Faktor von 1.03 schreiben.

$$azF = 1 + \frac{Re}{100} \quad (\text{G6-36})$$

Gleichung [G6-35](#) muss nun für Typ A und B angepasst werden.



## 6.6 Bundesschatzbrief Typ A

### 6.6 Bundesschatzbrief Typ A

Beachtet man, dass der Nominaljahreszins während der Laufzeit veränderlich ist und dass Kaufpreis und Rückzahlungskurs zu 100 % erfolgen, nimmt die Gleichung zur Renditeberechnung des Bundesschatzbriefes Typ A folgende Gestalt an:

$$100 = \frac{jnZ1}{azF} + \frac{jnZ2}{azF^2} + \frac{jnZ3}{azF^3} + \frac{jnZ4}{azF^4} + \frac{jnZ5}{azF^5} + \frac{jnZ6}{azF^6} + \frac{100}{azF^6} \quad (G6-37)$$

Natürlich muss nun noch Gleichung [G6-36](#) in Gleichung [G6-37](#) eingesetzt werden und man erhält:

$$100 = \frac{jnZ1}{1 + \frac{Re}{100}} + \frac{jnZ2}{\left(1 + \frac{Re}{100}\right)^2} + \frac{jnZ3}{\left(1 + \frac{Re}{100}\right)^3} + \frac{jnZ4}{\left(1 + \frac{Re}{100}\right)^4} + \frac{jnZ5}{\left(1 + \frac{Re}{100}\right)^5} + \frac{jnZ6}{\left(1 + \frac{Re}{100}\right)^6} + \frac{100}{\left(1 + \frac{Re}{100}\right)^6} \quad (G6-38)$$

Die Größen  $jnZ1$  bis  $jnZ6$  sind die Zinssätze der einzelnen Jahre während der Laufzeit. Gleichung [G6-38](#) lässt sich offensichtlich nicht explizit nach der Rendite  $Re$  auflösen. Daher löst ZinsMath die Gleichung auf iterativem Weg.

## 6.7 Bundesschatzbrief Typ B

Im Gegensatz zum Bundesschatzbrief Typ A werden in der Version B die Zinsen angesammelt. Aus diesem Grund vereinfacht sich Gleichung G6-38 glücklicherweise stark. Zur Berechnung der Rendite genügt der Vergleich des Kaufpreises mit dem Barwert des Rückzahlungswertes. Von den Gleichungen G6-35 und G6-36 bleibt daher nur noch unter Berücksichtigung der Laufzeit von 7 Jahren stehen:

$$C = \frac{Rk}{\left(1 + \frac{Re}{100}\right)^7} \quad (\text{G6-39})$$

Selbstverständlich lässt sich Gleichung G6-39 nach der Rendite  $Re$  auflösen und man erhält:

$$Re = \left(\sqrt[7]{\frac{Rk}{C}} - 1\right) \cdot 100 \quad (\text{G6-40})$$

Berechnungsbeispiel zur Renditeberechnung eines Bundesschatzbriefes Typ B:

Anlage	1000 EUR
Verzinsung 1. Jahr 1 %	
Verzinsung 2. Jahr 2 %	
Verzinsung 3. Jahr 3 %	
Verzinsung 4. Jahr 4 %	
Verzinsung 5. Jahr 5 %	
Verzinsung 6. Jahr 6 %	
Verzinsung 7. Jahr 7 %	1314.23 EUR

Tabelle T6-12: Rendite eines Bundesschatzbriefes

Somit ergibt sich ein Rückzahlungskurs von 132.423 %. Die Rendite  $Re$  berechnet sich also wie folgt:

$$Re = \left(\sqrt[7]{\frac{131.423}{100}} - 1\right) \cdot 100 = 3.98 \quad (\text{G6-41})$$

## 6.8 Finanzierungsschätze

---

### 6.8 Finanzierungsschätze

Für Finanzierungsschätze des Bundes gilt für die Berechnung der Rendite  $R_e$  ebenfalls Gleichung G6-40.

## 6.9 Null-Kupon-Anleihen

Eine Null-Kupon-Anleihe (Zero Bonds) ist ein Wertpapier, bei dem es keine regelmäßigen Zinszahlungen (Jahresnominalzins) gibt. Der Ertrag dieser Form der Geldanlage ergibt sich aus dem Unterschied zwischen dem Ausgabekurs und dem Rückkaufkurs, der später zurückgezahlt wird.

Ausgehend von Gleichungen G6-25 und G6-31 vereinfacht sich die Gleichung zur Renditeberechnung daher stark und lautet:

$$C = \frac{Rk}{azF^j} \quad (G6-42)$$

Die Auflösung nach  $azF$  ergibt somit:

$$azF = \sqrt[j]{\frac{Rk}{C}} \quad (G6-43)$$

Nachdem G6-36 für den Aufzinsungsfaktor  $azF$  eingesetzt wird, erhält man die Gleichung zur Renditeberechnung mit:

$$Re = \left( \sqrt[j]{\frac{Rk}{C}} - 1 \right) \cdot 100 \quad (G6-44)$$

Der Rückzahlungskurs  $Rk$ , der oft auch als Tilgungskurs bezeichnet wird, ist bei Null-Kupon-Anleihen oftmals 100 % (aber nicht zwingend). In diesem Fall hängt die Gleichung zur Berechnung der Rendite  $Re$  nur von der Laufzeit  $j$  und dem Ausgabekurs  $C$  ab.

Bei einem Ausgabekurs  $C$  von 50 %, 100 %iger Tilgung und einer Laufzeit von 10 Jahren ergibt sich so beispielsweise eine Rendite von 7.18 %.

### 6.10 Aktien

Auch wenn die Zeiten des „kollektiven“ Aktienwahnsinnes vorüber sind, muss dieses Kapitel der Finanzmathematik natürlich auch von *ZinsMath* bedient werden. Auch *ZinsMath* kann Ihnen keine sicheren Empfehlungen anbieten, vielmehr wird man in die Lage versetzt eine exakte Renditeanalyse durchzuführen. Insofern bezieht sich die *ZinsMath* Berechnung ausschließlich auf zahlenmäßig festgelegte Fakten.

Die Buchhandlungen sind mit Werken über Aktien hinreichend gefüllt. Bevor man sich zu einzelnen Aktienkäufen entscheidet, sollte man sich in Ruhe über Hintergründe, mögliche Vorteile und Risiken belesen.

Der Wert von Aktien resultiert im Wesentlichen aus der Erfahrung und den Fantasien der Anleger. Bei bekannten Werten (Werte aus dem deutschen Aktien Index DAX) überwiegen die Erfahrungen. Damit ist das Risiko dort geringer als bei „Noname-Aktien“, bei denen die Fantasie überwiegt. Das Risiko kann man verringern, wenn verschiedene Aktien zu einem Fond „gebündelt“ werden.

Es lassen sich eine Reihe von (bekannten!) Regeln aufschreiben, die grundsätzlich gültig sind \*.

- Wählt man bekannte Namen und kann man die Aktien über eine längere Zeit halten, sind gute Gewinne nahezu garantiert.
- Unbekannte Werte erhöhen das Risiko, können aber in kurzer Zeit hohe Rendite erzielen (aber auch umgekehrt). Man beachte die steuerlichen Rahmenbedingungen bei Verkäufen unter einem Jahr.
- Eine gute Alternative bieten Fonds an, welche sich aus verschiedenen Aktien(paketen) zusammensetzen. Auf diese Art kann das Risiko verkleinert werden, da der Absturz einer Aktie nicht so sehr ins Gewicht fällt.

Die Rendite einer Aktie kann entsprechend Gleichung G6-45 berechnet werden. Die Größe D ist die Auszahlung einer Dividende. Sollte man nicht in den Genuss einer solchen Zahlung kommen, ist D=0. Standardmäßig sind die Werte für D in *ZinsMath* auf diesen Wert gesetzt.

$$KP \equiv \sum_{j=1}^{j-1} \frac{D_j}{\left(1 + \frac{Re}{100}\right)^j} + \left( \frac{D_j + RB}{\left(1 + \frac{Re}{100}\right)^j} \right) \quad (G6-45)$$

In gewohnter Weise soll nun wieder ein virtuelles Beispiel vorgestellt werden. Tabelle T6-13 zeigt ein Rechenbeispiel auf.

---

\* Diese Regeln lassen sich nicht zwangsläufig auf die Performance genannter Aktie anwenden.

Kaufpreis KP	1000.- EUR
Rückzahlungsbetrag RB	1300.- EUR
Dividende D nach 1. Jahr	60.- EUR
Dividende D nach 2. Jahr	70.- EUR
Dividende D nach 3. Jahr	80.- EUR
Dividende D nach 4. Jahr	90.- EUR
Laufzeit j in Jahren	4

Tabelle T6-13: Rendite einer Aktie

Gemäß Gleichung G6-45 kann somit für das Beispiel geschrieben werden:

$$1000 \equiv \frac{60}{\left(1 + \frac{Re}{100}\right)^1} + \frac{70}{\left(1 + \frac{Re}{100}\right)^2} + \frac{80}{\left(1 + \frac{Re}{100}\right)^3} + \left(\frac{90 + 1300}{\left(1 + \frac{Re}{100}\right)^4}\right) \quad (\text{G6-46})$$

Die Gleichung wird für die Rendite  $Re = 13.4847\%$  gelöst. Setzt man die 4 jährlichen Dividendenzahlungen gleich Null, ergibt sich immerhin noch eine Rendite  $Re$  von  $6.78\%$ .

Letztlich sind Randbemerkungen notwendig: Der Kauf und Verkauf von Aktien geschieht nicht Gratis. Viele Banken setzen vor einem Aktienhandel die Eröffnung eines Depotkontos voraus. Dieses Konto wird dann auf unterschiedliche Weise belastet, pro Transaktion etc... In Abhängigkeit davon, welche Kosten berechnet werden und auf welcher Grundlage sie ausgewiesen werden, müssen diese Kosten in die Renditeberechnung mit einbezogen werden. Man sollte diese Größen im Kaufpreis (Emmissionskurs) und beim Rückkaufwert (Aktueller Kurs) berücksichtigen.

Die *ZinsMath*-Berechnung bezieht sich auf eine Aktie. Die Renditeberechnung ist unabhängig von der Zahl der Aktien, gleiche Rahmenbedingungen vorausgesetzt.

---

## 7 Steuern auf Kapitaleinkünfte

ZinsMath berücksichtigt keine Steuerabzüge auf Kapitalerträge. Seit 2009 gilt in Deutschland eine Abgeltungssteuer von 25 % zuzüglich Solidaritätszuschlag von 5,5 %, so dass sich ein Steuersatz von 26,375 % ergibt.

Bei zusätzlicher Berücksichtigung 8-prozentiger Kirchensteuer (Baden-Württemberg, Bayern) ergibt sich eine Gesamtbelastung von 27,819 %, bei 9-prozentiger Kirchensteuer (übrige Bundesländer) sind es 27,995 %.

Der jährliche Steuerfreibetrag beträgt 801 Euro für Ledige und 1.602 Euro für Eheleute.

Ihre Kapitaleinkünfte nach Steuern:	€ 873,00 Euro
Steuerliche Belastung:	
Abgeltungssteuer	€ 24,45 Euro
Solidaritätszuschlag	€ 1,34 Euro
Kirchensteuer	€ 2,20 Euro
Gesamtbelastung	€ 28,00 Euro
Ihre Angaben:	
Kapitaleinkünfte vor Steuern	€ 901,00 Euro
Sparer-Pauschbetrag	€ 801,00 Euro
Kirchensteuer	9 %

Tabelle T7-14: Beispielberechnung Steuern aus Kapitaleinkünften

## 8 Renten

### 8.1 Rente mit Kapitalverzehr

#### 8.1.1 Nachschüssige Barwertfaktoren

(Postnumerando-Rente)

Die Berechnung von Barwertfaktoren spielt dann eine Rolle, wenn man die finanzmathematische Fragestellung „Welches Kapital benötigt man, um über einen gewissen Zeitraum eine jährliche Rente ausgezahlt zu bekommen?“ diskutieren möchte.

Tabelle T8-15 zeigt ein solches Beispiel:

Jährliche Rente $jRente$ :	6000.- EUR
Jahreszins $jZ$ :	3.5 % p.a.
Verzinsung:	jährlich
Laufzeit $j$ in Jahren:	20
Verrechnung der Zinsen	Nachschüssig
Restkapital zum Ende der Laufzeit $Rest$	0.- EUR
Anlagebetrag $K$ :	gesucht

Tabelle T8-15: Zeitlich begrenzte Rentenzahlung aus einem vorhandenen Kapital

Für die angegebene Aufgabe kann folgendes Gleichungssystem G8-47 geschrieben werden.

$$\begin{aligned}
 K \cdot jZF - jRente &= a1 \\
 a1 \cdot jZF - jRente &= a2 \\
 a2 \cdot jZF - jRente &= a3 \\
 &\dots \\
 a8 \cdot jZF - jRente &= a9 \\
 a9 \cdot jZF - jRente &= Rest = 0
 \end{aligned}
 \tag{G8-47}$$

Die Gleichungen G8-47 lassen sich nach der gesuchten Größe  $K$  auflösen und man erhält für beliebige jährliche Laufzeiten folgenden Ausdruck:

$$K = \frac{Rest + \left( jRente \cdot \sum_{j=0}^{j-1} jZF^j \right)}{jZF^j}
 \tag{G8-48}$$



## 8.1 Rente mit Kapitalverzehr

Für das in Tabelle G8-47 aufgezeigte Beispiel berechnet sich das benötigte Kapital bei nachschüssiger Rentenzahlung mit  $K = 85274.41$  EUR; in diesem Fall ist das für die Rentenzahlung eingesetzte Kapital  $K$  zum Ende der Laufzeit vollständig aufgebraucht.

### 8.1.2 Vorschüssige Barwertfaktoren

(Pränumerando-Rente)

Für eine vorschüssige Zahlung der Rente ändert sich Tabelle T8-15 wie folgt:

Jährliche Rente $jRente$ :	6000.- EUR
Jahreszins $jZ$ :	3.5 % p.a.
Verzinsung:	jährlich
Laufzeit $j$ in Jahren:	20
Verrechnung der Zinsen	Vorschüssig
Restkapital zum Ende der Laufzeit $Rest$	0.- EUR
Anlagebetrag $K$ :	gesucht

Tabelle T8-16: Zeitlich begrenzte Rentenzahlung aus einem vorhandenen Kapital

Für die angegebene Aufgabe und Blick auf G8-47 kann folgendes Gleichungssystem geschrieben werden.

$$\begin{aligned}
 (K - jRente) \cdot jZF &= a1 \\
 (a1 - jRente) \cdot jZF &= a2 \\
 (a2 - jRente) \cdot jZF &= a3 \\
 &\dots \\
 (a8 - jRente) \cdot jZF &= a9 \\
 (a9 - jRente) \cdot jZF &= Rest = 0
 \end{aligned}
 \tag{G8-49}$$

Auch Gleichungen G8-49 läßt sich nach der gesuchten Größe  $K$  auflösen und man erhält für beliebige jährliche Laufzeiten folgenden Ausdruck:

$$K = jRente + \frac{Rest + \left( \sum_{j=1}^{j-1} jRente \cdot jZF^j \right)}{jZF^j}
 \tag{G8-50}$$

Für das in Tabelle G8-49 aufgezeigte Beispiel berechnet sich das benötigte Kapital bei vorschüssiger Rentenzahlung mit  $K = 88259.02$  EUR; in diesem Fall ist das für die Rentenzahlung eingesetzte Kapital  $K$  zum Ende der Laufzeit vollständig aufgebraucht.

## 8.2 Ewige Rente

---

### 8.2 Ewige Rente

#### 8.2.1 Ewige nachschüssige Rente mit jährlicher Verzinsung

Natürlich kann entsprechend des vorhergehenden Abschnittes die Frage gestellt werden: „Welches Kapital benötigt man, um von den Zinsen leben zu können?“ Dafür muss folgende finanzmathematische Aufgabe gelöst werden, welche in Tabelle T8-17 beschrieben ist.

Monatliche Rente $mRente$ :	1000.- EUR
Jahreszins $jZF$ :	7.0 % p.a.
Verzinsung:	einmal jährlich
Laufzeit $m$ in Monaten:	$\infty$

Anlagebetrag  $K$ : gesucht

Tabelle T8-17: Benötigtes Kapital für eine ewige Rente

Für genannte Problematik berechnet sich das notwendige Kapital  $K$  nach Gleichung G8-51.

$$K = \frac{12 \cdot mRente}{jZF - 1} \quad (G8-51)$$

Für das in diesem Handbuch nunmehr zur Gewohnheit gewordene Beispiel wird oben genannte Aufgabe mit  $K = 171428.57$  EUR gelöst.

Für diese Berechnung wird das Kapital jährlich verzinst. Die Rente  $mRente$  wird monatlich (12 mal) gezahlt. Die Rente kann aber auch einmalig, also  $12 \cdot mRente$  ausgezahlt werden; der Zeitpunkt der Auszahlung keine Rolle.

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass in der Berechnung eventuelle steuerliche Belastungen aus Zinserträgen nicht berücksichtigt werden, siehe hierzu Abschnitt 7.

### 8.2.2 Ewige nachschüssige Rente mit monatlicher Verzinsung

Für diese Aufgabenstellung muss folgende finanzmathematische Aufgabe gelöst werden, welche in Tabelle T8-18 beschrieben ist.

monatliche Rente $mRente$ :	1000.- EUR
Jahreszins $jZF$ :	7.0 % p.a.
Verzinsung:	monatlich nachschüssig
Laufzeit $m$ in Monaten:	$\infty$
Anlagebetrag $K$ :	gesucht

Tabelle T8-18: Benötigtes Kapital für eine ewige monatlich Rente

Für die genannte Problematik berechnet sich das notwendige Kapital  $K$  nach Gleichung G8-52.

$$K = \frac{mRente}{mZF - 1} \quad (\text{G8-52})$$

Für oben genanntes Beispiel ergibt sich für den Anlagebetrag  $K = 176861.39$  EUR.

Für diese Lösung wird die Rente  $mRente$  monatlich entnommen und das verbleibende Kapitals monatlich verzinst.

Steuern werden nicht berücksichtigt.

## 8.2 Ewige Rente

### 8.2.3 Ewige vorschüssige Rente mit monatlicher Verzinsung

Für diese Aufgabenstellung muss folgende finanzmathematische Aufgabe gelöst werden, welche in Tabelle T8-19 beschrieben ist.

monatliche Rente $mRente$ :	1000.- EUR
Jahreszins $jZF$ :	7.0 % p.a.
Verzinsung:	monatlich vorschüssig
Laufzeit $m$ in Monaten:	$\infty$

Anlagebetrag  $K$ : gesucht

Tabelle T8-19: Benötigtes Kapital für eine ewige monatlich Rente

Für die genannte Problematik berechnet sich das notwendige Kapital  $K$  nach Gleichung G8-53.

$$K = \frac{mZF \cdot mRente}{mZF - 1} \quad (\text{G8-53})$$

Für oben genanntes Beispiel ergibt sich für den Anlagebetrag  $K = 177861.39$  EUR.

Für diese Lösung wird die Rente  $mRente$  monatlich entnommen und das verbleibende Kapitals monatlich verzinst.

Steuern werden nicht berücksichtigt.

## 9 Kredite

### 9.1 Ratenkredite

Für diese Aufgabenstellung muss folgende finanzmathematische Aufgabe gelöst werden, welche in Tabelle T9-20 beschrieben ist.

Wie bei allen Kreditgeschäften besteht die Rate eines Kredites (hier eines Ratenkredites) aus einem Zins- und einem Tilgungsanteil. Ratenkredite haben die Eigenschaft, dass zum Ende der Laufzeit die Restschuld oftmals Null ist; andernfalls spricht man auch von einer so genannten Ballon-finanzierung.

Kreditbetrag $G$ :	15000.- EUR
Jahreszins $jZ$ :	5.2 % p.a.
Bearbeitungsgebühr $G_b$ :	0.- EUR
Verzinsung:	monatlich vorschüssig
Laufzeit $m$ in Monaten:	36
Monatliche Rate $R$ :	gesucht

Tabelle T9-20: Ratenkredit - Beispiel

Für einen Ratenkredit über 36 Monate und einem monatlichen Aufzinsungsfaktor  $mZF$  lässt sich somit das Gleichungssystem G9-54 aufschreiben.

$$\begin{aligned}
 G \cdot mZF - R &= RS_1 \\
 RS_1 \cdot mZF - R &= RS_2 \\
 RS_2 \cdot mZF - R &= RS_3 \\
 &\vdots \\
 RS_{35} \cdot mZF - R &= 0
 \end{aligned}
 \tag{G9-54}$$

Die Gleichungen in G9-54 lassen sich zusammenfassen und nach der Rate  $R$  auflösen. Dabei entsteht ein einfacher Ausdruck der Form:

$$R = G \cdot \frac{mZF^m}{mZF^m - 1} \cdot (mZF - 1)
 \tag{G9-55}$$

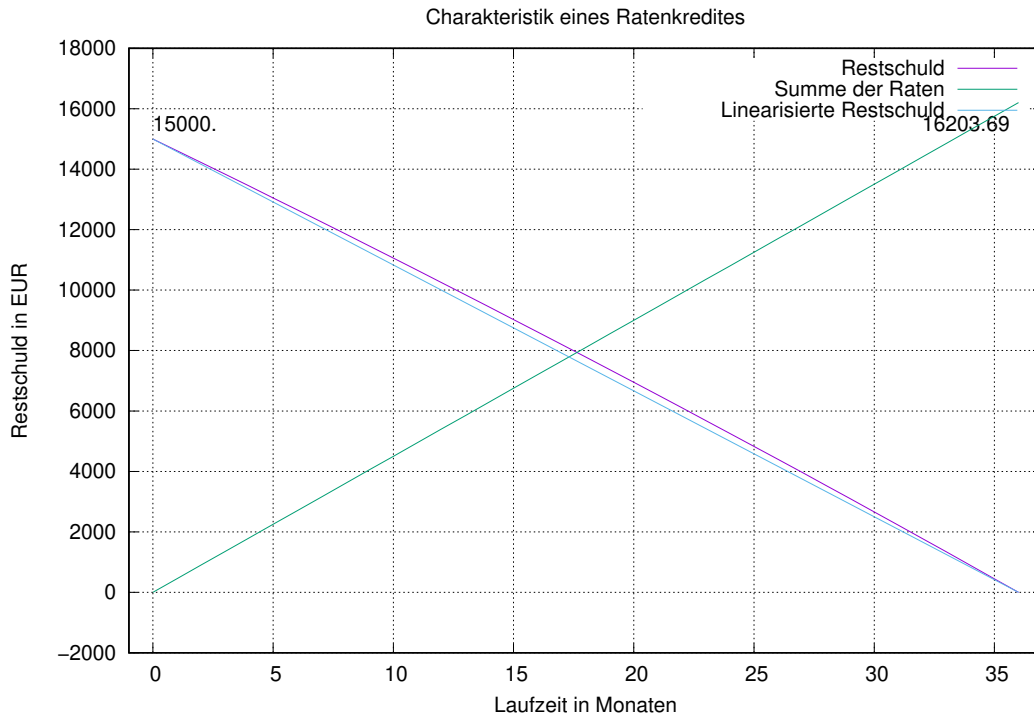
Für oben genanntes Beispiel und Verwendung der Gleichungen G3-3 und G9-55 lässt sich nun schreiben:

$$mZF = \sqrt[12]{\frac{5.2}{100}} + 1 = 1.004233$$

## 9.1 Ratenkredite

$$R = 15000 \cdot \frac{1.004233^{36}}{1.004233^{36} - 1} \cdot (1.004233 - 1) = 450.1 \quad (\text{G9-56})$$

Somit ergibt sich eine monatliche Rate von 450.10 EUR für oben genannten Ratenkredit und Konditionen. Der Restschuldverlauf dieses Kredites ist in Abbildung A9-5 grafisch dargestellt.



13.11.2019 20:30

Abbildung A9-5: Restschuldverlauf eines Ratenkredites

Gleichung G9-55 ist für Kredite mit ganzzahliger jährlicher Laufzeit äquivalent mit der in [1] angegebenen Rentenformel bei nachschüssiger Zahlung.

## 9.2 Annuitäten- und Hypothekendarlehen

Annuitäten- bzw. Hypothekendarlehen spielen in der Finanzwelt eine zentrale Rolle. Sie dienen nicht nur der Finanzierung von Grundstücken und Wohneigentum, vielmehr werden auch in der Wirtschaft größere Finanzierungen über diese Berechnungsform abgewickelt. Nach [2] ist Annuität die Jahresrate zur Abtragung und Verzinsung einer Schuld. Wie auch bei den Ratenkrediten und somit kurzzeitigen Finanzierungen besteht die Rate (Annuität) aus den Anteilen Zins und Tilgung. Der wesentliche Unterschied besteht aber darin, dass die Höhe der Tilgung in gewissen Spielräumen vom Kreditnehmer selbst festgelegt werden kann.

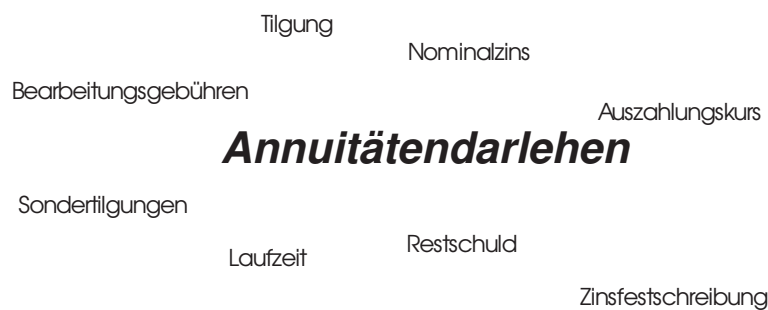


Abbildung A9-6: Faktoren zur Beurteilung eines Annuitätendarlehens

Eine wichtige und überaus zentrale Frage stellt immer wieder die Beurteilung von Annuitätendarlehen dar.

In Abbildung A9-6 sind einige Faktoren aufgezeigt, die Einfluss auf den Kreditverlauf haben. Man erkennt sehr schnell, dass es einige Parameter gibt, die voneinander abhängen. Annuitätendarlehen werden nicht zwangsläufig zu 100 % ausbezahlt. Daher muß bei der Bewertung einer solchen Kreditform natürlich auch auf den Auszahlungskurs Rücksicht genommen werden.

Aus Sicht der Finanzmathematik scheint nur die Ermittlung der Effektivverzinsung ein geeignetes Werkzeug zur Beurteilung einer Annuitätenfinanzierung zu sein; hierfür hat der Gesetzgeber in Form der Preisangabenverordnung Rahmenbedingungen vorgegeben.

Bevor nunmehr die Formeln zur Berechnung der Annuität, Restschuld und Laufzeit angegeben werden, sollen an dieser Stelle nun einige wichtige Begriffe, die bei der Berechnung und Diskussion von Annuitätendarlehen eine wichtige Rolle spielen, erläutert werden:

- **Auszahlungskurs:** Der Auszahlungskurs gibt an, wieviel Geld Sie tatsächlich *in die Hand* bekommen.
- **Nominalzins:** Der Nominalzins gibt an, in welchem Maße die aktuelle Restschuld verzinst wird (Zinskosten).



## 9.2 Annuitäten- und Hypothekenkredite

- Tilgung: Die Tilgung gibt an, in welchem Maße *die Schulden abgetragen werden*. Die Tilgung wird meistens in % angegeben und bezieht sich auf die aktuelle Restschuld eines jeden Jahres. Daher spricht man von anfänglicher Tilgung.
- Zinsfestschreibung: Annuitätenkredite haben oftmals Laufzeiten, bei denen die Kreditgeber nicht über den gesamten Zeitraum einen festen Zins (Nominalzins) garantieren wollen. Die Zinsfestschreibung gibt an, wie lange der Nominalzins nicht verändert wird.
- Restschuld: Die Restschuld hängt maßgeblich von der Höhe der Tilgung ab. Oftmals bezieht sich die Restschuld auf den Zeitpunkt der Zinsfestschreibung, die dann nicht gleich Null sein muss!

Zur Berechnung der Annuität und Restschuld genannter Kreditform soll hier folgendes Beispiel betrachtet werden:

Kreditvolumen KV:	100000.- EUR
Auszahlungskurs KA:	90 %
Jahresnominalzins jZ:	5.25 % p.a.
Laufzeit ZFS:	10 Jahre
Tilgung anfänglich TI:	2 %
Zahlweise:	1 Rate pro Jahr nachsüssig

Tabelle T9-21: Annuitätendarlehen - Beispiel - jährlich

Für die in Tabelle T9-21 genannten Verhältnisse berechnet sich die jährliche Annuität entsprechend Gleichung G9-57.

$$A = \frac{1}{100} \cdot KV \cdot (jZ + TI) \quad (\text{G9-57})$$

Es ergibt sich die jährlich zu zahlende Annuität  $A = 7250.-$  EUR. Darüber hinaus interessiert mit Blick auf das Rechenbeispiel die Restschuld nach 10 Jahren. Sie lässt sich mittels Gleichung G9-58 ermitteln.

$$RS = KV \cdot jZF^j - A \cdot \frac{jZF^j - 1}{jZF - 1} \quad (\text{G9-58})$$

Es ergibt sich eine Restschuld von 74548,72 EUR nach 10 Jahren. In Tabelle T9-22 ist der Kreditverlauf für das genannte Berechnungsbeispiel dargestellt.

Jahr	Start	Zins	Tilgung	End
1	100000	5250	2000	98000
2	98000	5145	2105	95895
3	95895	5034	2215	93679
4	93679	4918	2331	91347
5	91347	4795	2454	88893
6	88893	4666	2583	86310
7	86310	4531	2718	83591
8	83591	4388	2861	80730
9	80730	4238	3011	77718
10	77718	4080	3169	74548

Tabelle T9-22: Restschuldverlauf Annuitätendarlehen - Beispiel - jährlich

Natürlich lässt sich die Gleichung G9-58 auch zur Bestimmung der Gesamtlaufzeit verwenden. In diesem Fall ist  $RS = 0$  und die Gleichung ist nach den Jahren  $j$  aufzulösen. Somit ergibt sich folgender Ausdruck:

$$j = \frac{\ln\left(-100 \cdot \frac{A}{(KV \cdot jZ - 100 \cdot A)}\right)}{\ln\left(\frac{1}{100} \cdot jZ + 1\right)} \quad (\text{G9-59})$$

Setzt man die Werte aus Tabelle T9-21 in Gleichung G9-59 ein, so ergibt sich eine Laufzeit  $j$  von 25.17 Jahren.

Im Gegensatz zu Tabelle T9-21 werden in der Praxis oft monatliche Zahlungen (mit monatlicher Zinsverrechnung) vereinbart. Dann ändert sich die Aufgabenstellung wie folgt:

Kreditvolumen KV:	100000.- EUR
Auszahlungskurs KA:	90 %
Jahresnominalzins jZ:	5.25 % p.a.
Laufzeit ZFS:	10 Jahre
Tilgung anfänglich TI:	2 %
Zahlweise:	12 Raten pro Jahr nachsüssig monatliche Verrechnung von Zins und Tilgung

Tabelle T9-23: Annuitätendarlehen - Beispiel - monatlich

In Tabelle T9-24 ist der Zahlungsverlauf für das geschilderte Modell angegeben.

## 9.2 Annuitäten- und Hypothekenkredite

Monat	Start	Zins	Tilgung	End
1	100000	437	166	99833
2	99833	436	167	99665
3	99665	436	168	99497
4	99497	435	168	99328
5	99328	434	169	99159
6	99159	433	170	98989
...	...	...	...	...
115	75433	330	274	75159
116	75159	328	275	74884
117	74884	327	276	74607
118	74607	326	277	74329
119	74329	325	278	74050
120	74050	323	280	73770

Tabelle T9-24: Restschuldverlauf Annuitätendarlehen - Beispiel - monatlich

Die Restschuld zum Laufzeitende hängt offensichtlich von der Häufigkeit der Ratenzahlungen und der Häufigkeit der Zins- und Tilgungsverrechnung ab!

Entsprechend der Aufgabenstellung nach T9-23 und dem berechneten Zahlungsverlauf aus Tabelle T9-24 lassen sich die entsprechenden Größen auch grafisch darstellbar, siehe hierzu Abbildung A9-7.

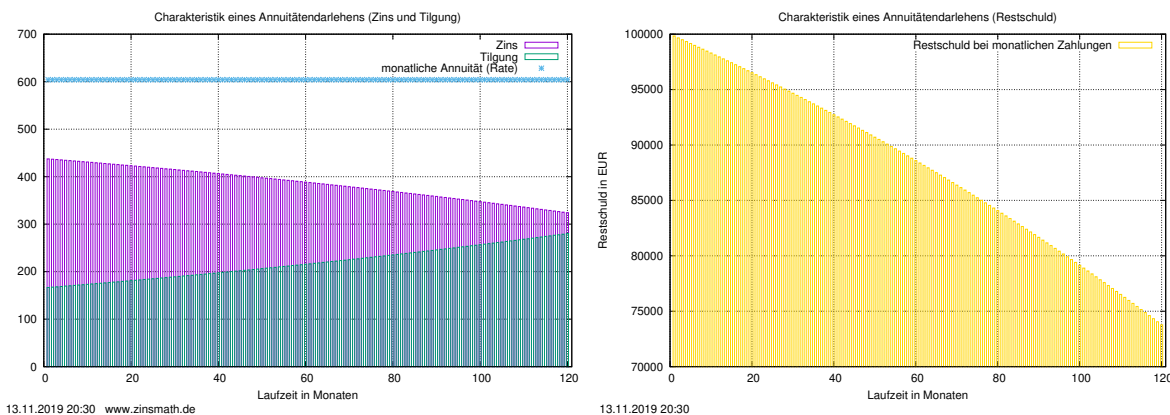


Abbildung A9-7: Zins, Tilgung und Restschuldverlauf eines Annuitäten- Hypothekendarlehens

Es kann darauf hingewiesen werden, dass für die beiden Zahlungsverläufe in Tabelle T9-22 und T9-24 bereits nach einer Laufzeit von 10 Jahren eine Differenz von 778,74 EUR besteht; siehe hierzu auch Abbildung A9-8.

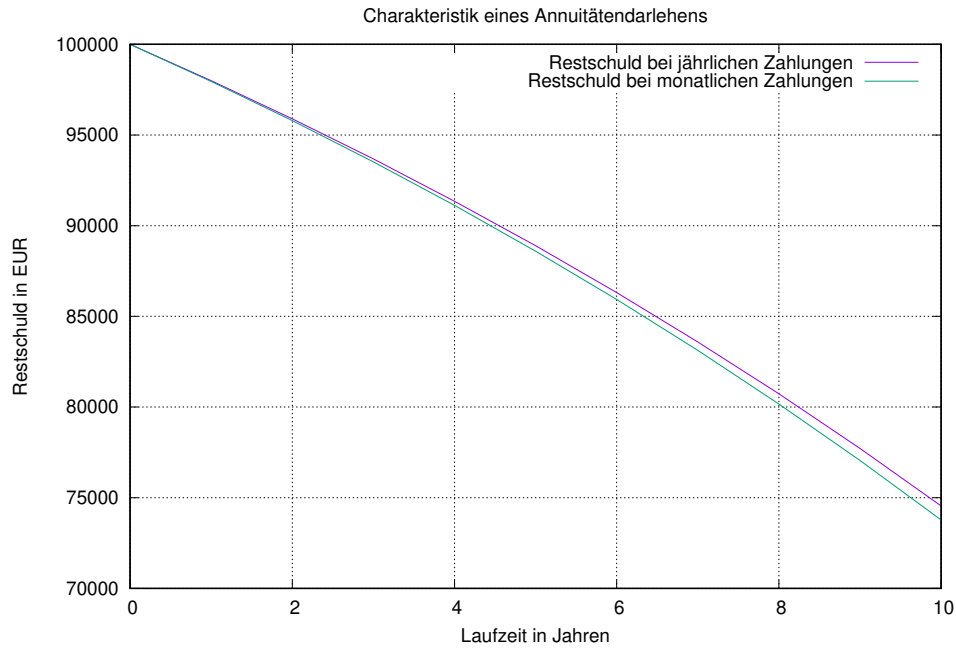


Abbildung A9-8: Restschuldverlauf eines Annuitäten- und Hypothekendarlehens

## 9.2 Annuitäten- und Hypothekenkredite

---

### 9.2.1 Effektivzinsberechnung

Zur Berechnung des Effektivzinses verweisen wir hier auf Kapitel 10.

Tabelle T9-25 zeigt den Zahlungsstrom für Dahrlehsbeispiel laut Tabelle T9-24.

Monat	Forward	Backward
0	90000.00	0.00
1	0.00	604.17
2	0.00	604.17
3	0.00	604.17
4	0.00	604.17
5	0.00	604.17
32	0.00	604.17
32	0.00	604.17
33	0.00	604.17
34	0.00	604.17
35	0.00	604.17
36	0.00	74374.67

Tabelle T9-25: Zahlungsstrom Annuitätendarlehen (Forward Backward) - nach Tabelle T9-24

### 9.3 Leasing

Für diese Aufgabenstellung muss folgende finanzmathematische Aufgabe gelöst werden, welche in Tabelle T9-26 beschrieben ist.

Leasingsumme:	50000.- EUR
Sonderzahlung zu Beginn:	8000.- EUR
Laufzeit in Monaten:	36
Sonderzahlung am Ende:	50000.- EUR
Monatliche Leasingrate:	1200.- EUR
Rendite $Re$ :	gesucht

Tabelle T9-26: Leasing - Beispiel

Zur Berechnung des Effektivzinses verweisen wir auch hier auf Kapitel 10.

Tabelle T9-27 zeigt den Zahlungsstrom für o.g. Leasingvertrag laut Tabelle T9-26.

Monat	Forward	Backward
0	50000.00	8000.00
1	0.00	1200.00
2	0.00	1200.00
3	0.00	1200.00
4	0.00	1200.00
5	0.00	1200.00
115	0.00	1200.00
116	0.00	1200.00
117	0.00	1200.00
118	0.00	1200.00
119	0.00	1200.00
120	0.00	6200.00

Tabelle T9-27: Zahlungsstrom Leasing - nach Tabelle T9-26

ZinsMath berechnet hierfür einen Effektivzins / Rendite von 8.67 % p.a.

## 10.2 Berechnung

---

# 10 Effektivzins

## 10.1 Vorwort

Geldgeschäfte können, egal welchen Namen sie auch tragen, mathematisch beurteilt werden. Unterhält man sich über eine Sparform, so wird der Anleger gewöhnlich von dem Begriff der Rendite Gebrauch machen. Hingegen spricht man von einem Effektivzins, möchte man beispielsweise eine Finanzierung in Anspruch nehmen.

Rendite = Effektivzins

Rendite und Effektivzins sind Beurteilungskriterien!

## 10.2 Berechnung

Der entscheidende Vorteil der Effektivzinsanalyse (oder Renditeanalyse) ist die Tatsache, dass **einfach nur alle getätigten Zahlungen miteinander verglichen werden**.

Dabei werden die Zahlungen »in ein Projekt« solange aufgezinst, bis sie den aufgezinsten Zahlungen »aus dem Projekt« entsprechen.

In der Preisangabenverordnung PAngV wird hierfür folgende Formel bereitgestellt:

$$\sum_{K=1}^{K=m} \frac{A_K}{(1+i)^{t_K}} = \sum_{K^*=1}^{K^*=m^*} \frac{A_{K^*}^*}{(1+i)^{t_{K^*}^*}} \quad (\text{G10-60})$$

Somit spielen nur die einzelnen Beträge und die Termine der Zahlungen ein Rolle.

Warum eine Zahlung erfolgte (Kontoführungsgebühr, Bereitstellungsgeld, Ausgabeaufschlag, Nominalzinsen etc...) interessiert dabei nicht!

### 10.3 ZinsMath Effektivzinssolver

Für folgenden unrealistischen Zahlungsverlauf soll eine Effektivzinsberechnung durchgeführt werden.

Zahlungen hin		Zahlungen zurück	
a[0]	= 500.;	b[0]	= 0.;
a[1]	= 500.;	b[1]	= 600.;
a[2]	= 500.;	b[2]	= 600.;
a[3]	= 500.;	b[3]	= 600.;
...			
a[10]	= 500.;	b[10]	= 600.;
a[11]	= 500.;	b[11]	= 600.;
a[12]	= 500.;	b[12]	= 600.;

Unterstellt man, dass es sich hier um monatliche Zahlungen handelt, entspricht dieser Zahlungsstrom einem Effektivzins von 554.14 % p.a. Handelt es sich jedoch um jährliche Zahlungen, entspricht dies einer Rendite von 16.9426 % p.a. (siehe Seite [10-57](#)).



## 10.3 ZinsMath Effektivzinssolver

```

* * * * *
* * * * *
* *
* *
* *      ZinsMath Effektivzinssolver
* *
* *
* *
* *      Torsten Wehner
* *      Berthold-Haupt-Str. 22
* *      01257 Dresden
* *      wehner@zinsmath.de
* *
* *
* *
* *      Version 4.0
* *      2010
* *
* *
* *
* *      14. 7.2013
* *      16:43:02
* *
* * * * *
* * * * *

```

You can find version-specific online documentation, and online technical support at:

<http://www.zinsmath.de>

Welcome to Effektivzinssolver

\*C\* INPUT DATA:

```

      inc =          12
      laufzeit =     12

```

\*C\* Externe Lieferung (arrays der gelieferten forward bzw. backward zahlungen):

\*C\* Anzahl der auf den Protokoll File geschriebenen input zeilen (maxlines)  
maxlines = 50

0	forward	500	backward	0
1	forward	500	backward	600
2	forward	500	backward	600
3	forward	500	backward	600
4	forward	500	backward	600
5	forward	500	backward	600
6	forward	500	backward	600
7	forward	500	backward	600
8	forward	500	backward	600
9	forward	500	backward	600
10	forward	500	backward	600

## 10 Effektivzins

	11	forward	500	backward	600
	12	forward	500	backward	600
*C*	Summe der forward Zahlungen		6500		
*C*	Summe der backward Zahlungen		7200		
*C* Start des Loesungsverfahrens:					
	links		rechts		Abweichung
1	links	1141800.4	rechts	1369560.4	19.947451
2	links	26090.631	rechts	30708.757	17.700324
3	links	16381.289	rechts	19057.546	16.337284
4	links	12695.302	rechts	14634.363	15.273842
5	links	10686.294	rechts	12223.552	14.385331
6	links	9397.9305	rechts	10677.517	13.615616
7	links	8490.5392	rechts	9588.6471	12.933311
8	links	7811.1565	rechts	8773.3878	12.318679
9	links	7280.0786	rechts	8136.0943	11.758331
10	links	6851.4166	rechts	7621.7	11.242687
...					
63	links	3053.5527	rechts	3064.2632	0.35075649
64	links	3037.3488	rechts	3044.8186	0.24593026
65	links	3021.5448	rechts	3025.8538	0.14260792
66	links	3006.1246	rechts	3007.3495	0.040747189
67	links	2991.0728	rechts	2989.2873	-0.059692426
68	links	3006.1246	rechts	3007.3495	0.040747189
69	links	3004.603	rechts	3005.5236	0.030639931
70	links	3003.0852	rechts	3003.7022	0.020546843
71	links	3001.571	rechts	3001.8852	0.010467886
72	links	3000.0605	rechts	3000.0725	0.00040301992

Effektivzins ist: 554.1 % p.a.

8 msec needed

outerloops needed: 72

innerloops needed: 936

nothing\_to\_do: 0

16:43:02

## 10.3 ZinsMath Effektivzinssolver

```
* * * * *
* * * * *
* *
* *
* *      ZinsMath Effektivzinssolver
* *
* *
* *
* *      Torsten Wehner
* *      Berthold-Haupt-Str. 22
* *      01257 Dresden
* *      wehner@zinsmath.de
* *
* *
* *
* *      Version 4.0
* *      2010
* *
* *
* *
* *      14. 7.2013
* *      16:43:02
* *
* * * * *
* * * * *
```

You can find version-specific online documentation, and online technical support at:

<http://www.zinsmath.de>

Welcome to Effektivzinssolver

\*C\* INPUT DATA:

```
    inc =          1
  laufzeit =       12
```

\*C\* Externe Lieferung (arrays der gelieferten forward bzw. backward zahlungen):

\*C\* Anzahl der auf den Protokoll File geschriebenen input zeilen (maxlines)  
maxlines = 50

0	forward	500	backward	0
1	forward	500	backward	600
2	forward	500	backward	600
3	forward	500	backward	600
4	forward	500	backward	600
5	forward	500	backward	600
6	forward	500	backward	600
7	forward	500	backward	600
8	forward	500	backward	600
9	forward	500	backward	600
10	forward	500	backward	600

## 10 Effektivzins

11	forward	500	backward	600
12	forward	500	backward	600
*C*	Summe der forward Zahlungen	6500		
*C*	Summe der backward Zahlungen	7200		
*C* Start des Loesungsverfahrens:				
		links	rechts	Abweichung
1	links	5.005005e+38	rechts 6.006006e+38	20
2	links	4.9357576e+14	rechts 5.9229092e+14	20
3	links	1.4390323e+11	rechts 1.7268387e+11	20
4	links	1.2932867e+09	rechts 1.5519434e+09	19.999954
5	links	48284496	rechts 57940795	19.998757
6	links	4006474.1	rechts 4807168.9	19.985024
7	links	563538.28	rechts 675645.94	19.89353
8	links	117591.15	rechts 140509.38	19.489758
9	links	34006.029	rechts 40207.235	18.235607
10	links	13095.131	rechts 15114.157	15.418144
...				
31	links	2994.1937	rechts 2993.0325	-0.038783447
32	links	3004.315	rechts 3005.178	0.028725335
33	links	3003.2998	rechts 3003.9598	0.021974545
34	links	3002.2853	rechts 3002.7424	0.015223734
35	links	3001.2715	rechts 3001.5258	0.0084729017
36	links	3000.2583	rechts 3000.31	0.0017220496
37	links	2999.2459	rechts 2999.095	-0.0050288218
38	links	3000.2583	rechts 3000.31	0.0017220496
39	links	3000.1571	rechts 3000.1885	0.0010469633
40	links	3000.0558	rechts 3000.0669	0.00037187684

Effektivzins ist: 16.942 % p.a.

16 msec needed

outerloops needed: 40

innerloops needed: 520

nothing\_to\_do: 0

16:51:38

## 10.4 Effektivzinsberechnung mit hoher Auflösung

### 10.4 Effektivzinsberechnung mit hoher Auflösung

Entsprechend Gleichung G10-60 zur Ermittlung des Effektivzinses kann für feinere Auflösungen geschrieben werden:

$$\sum_{K=1}^{K=m} \frac{A_K}{(1+i)^{\frac{1}{inc}}} = \sum_{K^*=1}^{K^*=m^*} \frac{A_{K^*}^*}{(1+i)^{\frac{1}{inc^*}}} \quad (\text{G10-61})$$

dabei sind folgende Werte für *inc* zulässig.

	Auflösung
inc = 525600	minutengenau
inc = 8760	stundengenau
inc = 365	taggenau
inc = 12	monatliche
inc = 1	jaehrlich

Tabelle T10-28: Effektivzinsberechnung mit hoher Auflösung

Kleinstes Inkrement in ZinsMath ist die minutengenau Auflösung.

Wichtig für den Anwender ist hier zu wissen, daß ein Jahr nach der in der Bundesrepublik Deutschland gültigen PAngV 365 Tage hat. Diese Berechnungsmethode steht im Widerspruch zu anderen internationalen Vorschriften, ist aber die exaktere.

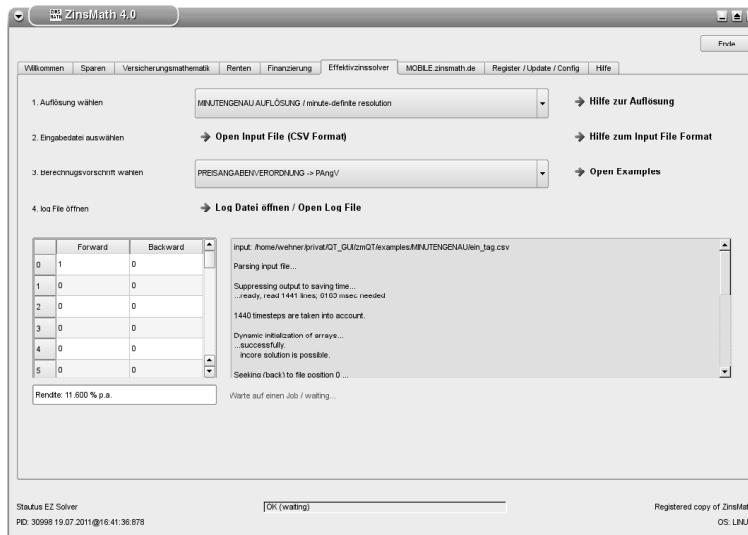


Abbildung A10-9: ZinsMath GUI des Effektivzinssolvers

### 10.5 ZinsMath CSV Creator

ZinsMath CSV Creator unterstützt Sie bei der Erstellung von Input Files (Berechnungsvorlagen) für den ZinsMath Effektivzinssolver. Die Files sind CSV formatiert und können mit den gängigen Büro/Tabellen-Kalkulationsprogrammen bearbeitet werden; aber nur dann, wenn diese Programme bezüglich der Zeilenanzahl ihre Limits nicht erreichen.

Abbildung **A10-10** zeigt die Dateneingabe zur Berechnung des Effektivzinses eines Ratenkredites mit folgenden Konditionen:

Auszahlungsbetrag:	25750.- EUR
Laufzeit in Monaten:	60
Monatliche Rate:	581.88 EUR

Tabelle T10-29: Dateneingabe zur Berechnung des Effektivzinses eines Ratenkredites

## 10.5 ZinsMath CSV Creator

Forward 0

Backward 581.88

Laufzeit in Jahren 0

Laufzeit in Monaten 60

Laufzeit in Tagen 0

Laufzeit in Stunden 0

Laufzeit in Minuten 0

Erste Zeile modifizieren

Forward 25750

Backward 0

Letzte Zeile modifizieren

Forward 0

Backward 0

Monatsgenaue Aufloesung gewaehlt.  
Zeilen 60

0%

Export to File... Help Exit

Abbildung A10-10: ZinsMath CSV Creator

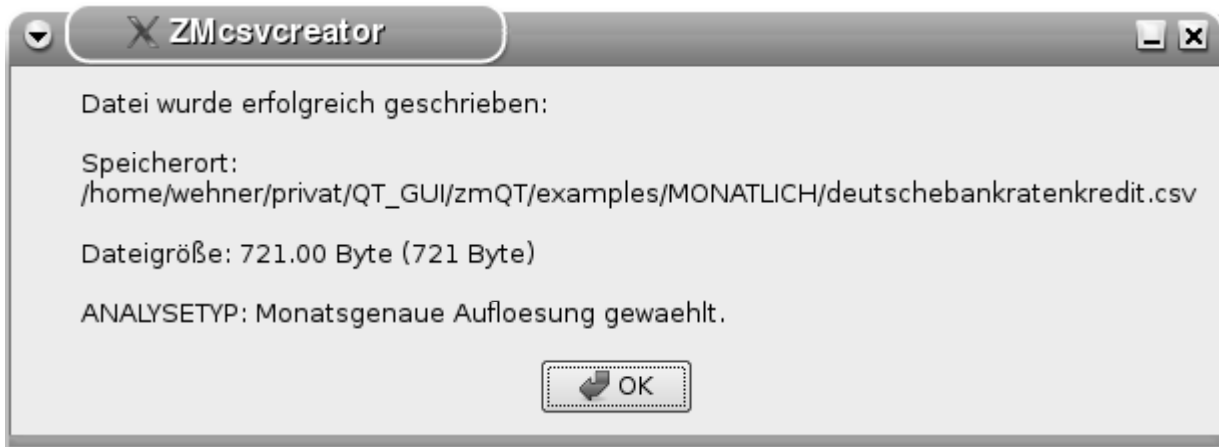


Abbildung A10-11: ZinsMath CSV Creator / Meldung nach geschriebenem CSV File

In Abschnitt 10.6 können Sie den Inhalt des Ausgabefiles sehen.

Einen mächtigen Text-Editor finden Sie gegebenenfalls unter <http://www.gnu.org/software/emacs/>, eine genaue Anleitung zur Verwendung dieses Tools finden Sie ebenfalls dort.



## 10.6 Dateninput Effektivzinsanalyse

---

### 10.6 Dateninput Effektivzinsanalyse

Beispiel eines Ratenkredites, siehe hierzu Tabelle T10-29.

```
25750;0; 0
0;581.88; 1
0;581.88; 2
0;581.88; 3
0;581.88; 4
0;581.88; 5
0;581.88; 6
0;581.88; 7
0;581.88; 8
0;581.88; 9
0;581.88; 13
... usw.
0;581.88; 52
0;581.88; 53
0;581.88; 54
0;581.88; 55
0;581.88; 56
0;581.88; 57
0;581.88; 58
0;581.88; 59
0;581.88; 60
```

*Anmerkung zum Format: Der ZinsMath Effektivzinssolver liebt und verwendet die ersten beiden semikolon getrennten Zahlen pro Zeile. Alle weiteren Informationen werden ignoriert.*

Somit wäre folgender Dateninput ebenfalls zulässig:

```
25750;0
0;581.88; erste Rate
0;581.88
0;581.88
0;581.88
0;581.88
0;581.88
0;581.88
0;581.88
0;581.88
0;581.88
... usw.
0;581.88
0;581.88
0;581.88
0;581.88
0;581.88
0;581.88
0;581.88
0;581.88
```

## 10 Effektivzins

---

0;581.88; letzte Rate

Die Redite der Effektivzins dieses Darlehens beträgt 13.46 % p.a.

# 11 Umrechnungsfaktoren / Effektivverzinsung

jZ	mZF	tZF	jZ	mZF	tZF
0.00	1.000000000000	1.000000000000	6.00	1.004867550565	1.000161871178
0.10	1.000083295163	1.000002776394	6.10	1.004946515449	1.000164490915
0.20	1.000166514084	1.000005550023	6.20	1.005025412139	1.000167108191
0.30	1.000249656907	1.000008320893	6.30	1.005104240758	1.000169723011
0.40	1.000332723779	1.000011089009	6.40	1.005183001430	1.000172335378
0.50	1.000415714845	1.000013854378	6.50	1.005261694277	1.000174945299
0.60	1.000498630248	1.000016617004	6.60	1.005340319420	1.000177552777
0.70	1.000581470133	1.000019376893	6.70	1.005418876981	1.000180157816
0.80	1.000664234644	1.000022134050	6.80	1.005497367083	1.000182760422
0.90	1.000746923923	1.000024888480	6.90	1.005575789844	1.000185360599
1.00	1.000829538114	1.000027640190	7.00	1.005654145387	1.000187958352
1.10	1.000912077360	1.000030389184	7.10	1.005732433832	1.000190553685
1.20	1.000994541801	1.000033135468	7.20	1.005810655299	1.000193146602
1.30	1.001076931580	1.000035879047	7.30	1.005888809907	1.000195737109
1.40	1.001159246839	1.000038619927	7.40	1.005966897776	1.0001983325209
1.50	1.001241487716	1.000041358112	7.50	1.006044919024	1.000200910907
1.60	1.001323654355	1.000044093609	7.60	1.006122873772	1.000203494207
1.70	1.001405746893	1.000046826422	7.70	1.006200762136	1.000206075114
1.80	1.001487765471	1.000049556556	7.80	1.006278584235	1.000208653633
1.90	1.001569710227	1.000052284017	7.90	1.006356340187	1.000211229768
2.00	1.001651581302	1.000055008811	8.00	1.006434030110	1.000213803523
2.10	1.001733378833	1.000057730942	8.10	1.006511654120	1.000216374902
2.20	1.001815102957	1.000060450415	8.20	1.006589212334	1.000218943910
2.30	1.001896753814	1.000063167237	8.30	1.006666704869	1.000221510552
2.40	1.001978331539	1.000065881411	8.40	1.006744131841	1.000224074832
2.50	1.002059836270	1.000068592943	8.50	1.006821493366	1.000226636753
2.60	1.002141268143	1.000071301838	8.60	1.006898789559	1.000229196321
2.70	1.002222627294	1.000074008102	8.70	1.006976020536	1.000231753540
2.80	1.002303913860	1.000076711740	8.80	1.007053186411	1.000234308414
2.90	1.002385127974	1.000079412755	8.90	1.007130287300	1.000236860947
3.00	1.002466269772	1.000082111155	9.00	1.007207323316	1.000239411144
3.10	1.002547339389	1.000084806943	9.10	1.007284294574	1.000241959009
3.20	1.002628336959	1.000087500125	9.20	1.007361201187	1.000244504546
3.30	1.002709262615	1.000090190706	9.30	1.007438043269	1.000247047759
3.40	1.002790116491	1.000092878691	9.40	1.007514820932	1.000249588653
3.50	1.002870898719	1.000095564085	9.50	1.007591534291	1.000252127232
3.60	1.002951609433	1.000098246892	9.60	1.007668183456	1.000254663500
3.70	1.003032248765	1.000100927118	9.70	1.007744768541	1.000257197462
3.80	1.003112816846	1.000103604769	9.80	1.007821289657	1.000259729121
3.90	1.003193313808	1.000106279848	9.90	1.007897746916	1.000262258482
4.00	1.003273739782	1.000108952360	10.00	1.007974140429	1.000264785549
4.10	1.003354094899	1.000111622312	10.10	1.008050470307	1.000267310326
4.20	1.003434379290	1.000114289706	10.20	1.008126736662	1.000269832817
4.30	1.003514593084	1.000116954550	10.30	1.008202939602	1.000272353027
4.40	1.003594736411	1.000119616846	10.40	1.008279079240	1.000274870959
4.50	1.003674809400	1.000122276601	10.50	1.008355155684	1.000277386617
4.60	1.003754812181	1.000124933819	10.60	1.008431169043	1.000279900007
4.70	1.003834744882	1.000127588505	10.70	1.008507119428	1.000282411131
4.80	1.003914607631	1.000130240664	10.80	1.008583006948	1.000284919994
4.90	1.003994400555	1.000132890300	10.90	1.008658831710	1.000287426600
5.00	1.004074123784	1.000135537418	11.00	1.008734593824	1.000289930953
5.10	1.004153777443	1.000138182024	11.10	1.008810293397	1.000292433058
5.20	1.004233361659	1.000140824121	11.20	1.008885930537	1.000294932917
5.30	1.004312876560	1.000143463715	11.30	1.008961505353	1.000297430536
5.40	1.004392322271	1.000146100811	11.40	1.009037017950	1.000299925917
5.50	1.004471698917	1.000148735413	11.50	1.009112468437	1.000302419066
5.60	1.004551006625	1.000151367525	11.60	1.009187856920	1.000304909987
5.70	1.004630245519	1.000153997153	11.70	1.009263183505	1.000307398682
5.80	1.004709415724	1.000156624302	11.80	1.009338448298	1.000309885157
5.90	1.004788517365	1.000159248975	11.90	1.009413651406	1.000312369414
6.00	1.004867550565	1.000161871178	12.00	1.009488792935	1.000314851459

Tabelle T11-30: Umrechnungsfaktoren Jahres- Monats- und Tageszins

## 12 Warenzeichen

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Marktschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten sind und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

Windows is a registered trademark of Microsoft Corporation in the United States and other countries.

Microsoft Excel is a registered trademark of Microsoft Corporation.

# Literatur

- [1] Dubbel, Taschenbuch der Mathematik
- [2] Brockhaus, 4. aktualisierte Auflage, Brockhaus GmbH, Mannheim 1992
- [3] Wolfgang Eichholz und Eberhard Vilkner, Taschenbuch der Wirtschaftsmathematik, Fachbuchverlag Leipzig, 1997
- [4] Günter Wöhe, Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, Verlag Vahlen, 2000
- [5] Jürgen Tietze, Einführung in die Finanzmathematik, Vieweg, 1996
- [6] Karl Micheal Ortmann, Praktische Lebensversicherungsmathematik, Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2009
- [7] Eckehard Wagner, Effektivzins von Krediten und Wertpapieren, Helmut Richardi Verlag, 1988
- [8] Alfred Hueck und Claus-Wilhelm Canaris, Recht der Wertpapiere, Verlag Franz Vahlen, 1986
- [9] Helmut Rüßmann,  
<http://ruessmann.jura.uni-sb.de/Kreditberechnung/index.php>  
Lehrstuhl für Bürgerliches Recht, Zivilprozessrecht und Rechtsphilosophie  
Prof. Dr. Helmut Rüßmann,  
Universität des Saarlandes, 2001
- [10] <http://de.wikipedia.org/wiki/Finanzmathematik>
- [11] <http://de.wikipedia.org/wiki/Kredit>
- [12] Michael Goosens, Frank Mittelbach, Alexander Samarin. Der  $\LaTeX$  Begleiter, Addison-Wesley, 1994

# Index

## A

Abkürzungsverzeichnis .....	0-4
Aktien .....	6-37
Annuitäten- und Hypothekenkredite .....	9-48

## B

Barwertberechnung (Present Value) .....	4-20
Bundesschatzbrief Typ A .....	6-33
Bundesschatzbrief Typ B .....	6-34
Bundeswertpapiere .....	6-32

## D

Dateninput Effektivzinsanalyse .....	10-65
--------------------------------------	-------

## E

Effektivzins .....	10-55
Effektivzins für unterjährige Verzinsung ...	3-12
Effektivzinsberechnung .....	9-53
Effektivzinsberechnung mit hoher Auflösung	10-61
Endwertberechnung (Future Value) .....	4-19
Ewige nachschüssige Rente mit jährlicher Ver- zinsung .....	8-43
Ewige nachschüssige Rente mit monatlicher Ver- zinsung .....	8-44
Ewige Rente .....	8-43
Ewige vorschüssige Rente mit monatlicher Ver- zinsung .....	8-45

## F

Festgeld .....	4-15
Festverzinsliche Wertpapiere mit Zinsansammlung	6-29
Festverzinsliche Wertpapiere mit Zinsauszahlung	6-27
Finanzierungsschätze .....	6-35
Formelzeichen .....	2-8

## K

Kapitalbildene LV mit Dynamik .....	5-24
-------------------------------------	------

Kapitalbildene LV mit festen Prämien .....	5-22
--	------

## L

Leasing .....	9-54
---------------	------

## N

Nachschüssige Barwertfaktoren .....	8-40
Null-Kupon-Anleihen .....	6-36

## R

Ratenkredite .....	9-46
Ratensparen .....	4-17
Rente mit Kapitalverzehr .....	8-40
Renten .....	8-40

## S

Softwarebezug und Registrierung .....	1-5
Sparen .....	4-14
Steuern auf Kapitaleinkünfte .....	7-39

## U

Umrechnungsfaktoren .....	11-67
---------------------------	-------

## V

Versicherungen .....	5-22
Vertragsbedingungen .....	2-6
Vorschüssige Barwertfaktoren .....	8-41

## W

Wertpapiere .....	6-27
Wertpapiere mit variablem Zins und Zinsansamm- lung .....	6-31
Wertpapiere mit variablem Zins und Zinsauszah- lung .....	6-30

## Z

Zinsberechnung aus Barwert und Endwert .	4-21
ZinsMath CSV Creator .....	10-62
Zinsrechnung .....	3-9



Kontakt:

Telefon:

Fax:

E-Mail:

WWW:

+49 163 3735575

+49 32224111908

info@zinsmath.de

<http://www.zinsmath.de>

Adresse:

Torsten Wehner  
Berthold-Haupt-Str. 22  
01257 Dresden  
Germany